
TAYLOR INSTITUTION
DOMI NUS ILLU MINA TIO MEA

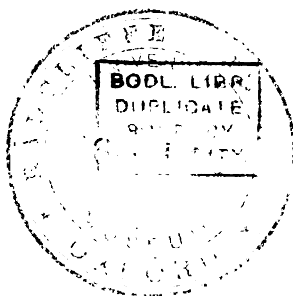


OPERE COMPLETE

DI

GALILEO GALILEI

Tomo XIII.



LE OPERE

DI

GALILEO GALILEI

PRIMA EDIZIONE COMPLETA

CONDOTTA SUGLI AUTENTICI MANOSCRITTI PALATINI

E DEDICATA

A S. A. I. E R. LEOPOLDO II

GRANDUCA DI TOSCANA

TOMO XIII





FIRENZE

SOCIETÀ EDITRICE FIORENTINA

1855


TAYLOR INSTITUTION
UNIVERSITY
OF
OXFORD
LIBRARY

PATRONO DELLA EDIZIONE

S. A. I. E R. IL GRANDUCA LEOPOLDO II.

DIRETTORE

IL PROF. EUGENIO ALBÈRI.

OPERE FISICO-MATEMATICHE

TOMO III.

DISCORSI

E

DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE

INTORNO A DUE NUOVE SCIENZE

ATTENENTI ALLA MECCANICA ED AI MOVIMENTI LOCALI.

ALTRIMENTI

DIALOGHI DELLE NUOVE SCIENZE.



AVVERTIMENTO

Dell' occasione di questo insigne lavoro condotto da Galileo nel tempo della sua relegazione in Arcetri, e delle vicissitudini che ne ritardarono la stampa, la quale finalmente ebbe luogo in Leida pei tipi degli Elzeviri, nel 1638, ha potuto il lettore diffusamente erudirsi nell' Epistolario.

Delle attinenze di quest' ultimo parto della mente del nostro Filosofo coi primitivi suoi studj, fu da noi fatto parola nell' avvertimento preposto agl' inediti *Sermones de motu gravium.*

Dell' importanza dell' opera, finchè da noi ne sia partitamente discorso nella Vita dell'Autore, valgano le erudite osservazioni contenute nella prefazione generale all'edizione del 1718 (rispondenti specialmente alle assurde e appassionate accuse di Cartesio) e l'amplissima testimonianza del celebre Lagrange, che riportiamo in seguito del presente avvertimento.

Qui pertanto ci ristringeremo ad accennare i miglioramenti, che a noi è stato dato introdurre nella riproduzione di questi Dialoghi.

L' edizione originale di Leida comprende le sole quattro prime Giornate, nelle quali è discorso:

Della coerenza delle parti de' corpi solidi;
Della resistenza dei solidi all' essere spezzati;
Del moto equabile e del moto naturalmente accelerato;
Del moto violento, ovvero dei projetti.

L'edizione di Firenze del 1718 e le posteriori delle opere di Galileo, conservando il titolo primitivo, vi hanno aggiunto i tre articoli seguenti:

I. Tutto il tratto che leggesi dopo lo Scholium al Corol. II del Teor. II *de motu naturaliter accelerato* fino al Teor. III; e ciò nella Giornata III, dalla pag. 174 alla 179 del presente volume; aggiunta introdotta per la difficoltà promossa dal Viviani al suo maestro contro il principio « che il grave cadente dalla medesima » altezza acquisti il medesimo grado di velocità, qualunque sia » l'inclinazione del piano per cui cade, rimossi gl'impedimenti ». Studiandovi sopra, ne trovò Galileo la dimostrazione, e fattala distendere dal Viviani medesimo, la mandò nel 1639 al Castelli con sua lettera (vol. VII della presente edizione, pag. 238), dicendo d'aver pensiero di spargerne copie per l'Italia ed in Francia. Questa dimostrazione fu per la prima volta inserita nel vol. III delle Opere di Galileo, edizione di Bologna 1665 a pag. 132, sotto il titolo di *Aggiunta postuma dell'Autore.*

II. Il principio d'una quinta Giornata, che Galileo, incitato dal plauso universale a continuare in quelle speculazioni, stava dettando al Torricelli quando morì, e che il Viviani raccolse dai manoscritti del Torricelli medesimo, e stampò da prima in seguito al suo libro della *Scienza universale delle proporzioni*; il qual libro non è altro appunto che una più completa esposizione delle dottrine enunciate da Galileo in questa quinta Giornata.

III. La Giornata sesta *Della forza della percossa*, della quale lo stesso Viviani, dopo la morte di Galileo, prese copia da Vincenzo di lui figlio.

A questi successivi miglioramenti noi ci siamo trovati in grado di aggiungerne altri relativi alle quattro prime Giornate, le quali riproduciamo rivedute in certa guisa del suo medesimo Autore.

Tra i Codici Palatini uno ve n'ha (il IX della parte V) consistente in un esemplare della edizione di Leida corretto ed accresciuto di mano del Viviani con approvazione dello stesso Galileo, come in quelle margi-

nali postille è avvertito più d'una volta, e colla giunta in calce di un foglio manoscritto contenente nuovi concetti dettati da Galileo medesimo, i quali il Padre Clemente delle Scuole Pie (Famiano Michelini) inserì ai luoghi loro in un esemplare, che fu già posseduto da Cosimo nipote di Galileo (stampati poi questi dal Venturi a pagine 348 e seg. delle sue *Memorie e Lettere* ec.)

Ora noi abbiamo fatto tesoro e riportato a' proprj luoghi, in carattere corsivo, così i brani raccolti dal Michelini che le postille del Viviani, ed emendato inoltre diversi errori più o meno gravi, e di non facil rilievo, che erano corsi tanto nella prima edizione che nelle successive (1); alle quali tutte per conseguenza possiamo dire con legittimo compiacimento soprastar la presente.

Abbiamo altresì mantenuta la prefazione alla stampa degli Elzeviri, che vuolsi senza meno ritenere per lavoro di Galileo, e che ciò non ostante è stata ommessa nelle posteriori edizioni. Solo abbiamo qui preterita la lettera dedicatoria al duca di Noailles per avergli già dato luogo nella Corrispondenza Epistolare (T. VII, p. 209).

(1) Una di queste emendazioni è nei titoli delle due prime Giornate; i quali, secondo un'avvertenza del Viviani, sono da noi stati posti in ordine inverso a quello osservato nella edizione di Leida, dove la prima Giornata è intitolata *Della Resistenza dei solidi all' essere spezzati*, e la seconda *Della Coerenza delle parti de' corpi solidi*, mentre in effetto la trattazione procede inversamente, sebbene il primo discorso incominciasse dall' argomento della *Resistenza*; il quale subito poi tralasciato per digredire in quello della *Coerenza* e d'altri varj problemi, non è ripreso ex professo che nella seconda Giornata, come appunto è dall'Autore stesso dichiarato nel fine della prima e nell'introduzione della susseguente.

Un'altra variazione insinua il Viviani nel titolo generale dell'Opera, la quale egli considera abbracciare non *due* ma *tre* scienze: quella della Resistenza dei corpi solidi all' essere spezzati, quella dei Movimenti locali, e quella del Moto violento, ovvero dei projetti: le quali due ultime Galileo comprende in una sola, come può vedersi sul fine della prefazione.

Ulteriori svolgimenti delle dottrine contenute in quest' Opera, e la risoluzione di diverse questioni indi promosse, si hanno nel trattato delle Resistenze del Viviani e del Grandi, ed in più Note di quest' ultimo, che illustrano l' edizione del 1718, e che da noi si riproducono nel susseguente volume.

Ecco in fine le sopra citate osservazioni:

« Si trovava il Galileo con lunghi e faticosi studj d' aver conseguito le dimostrazioni intorno a due nuove scienze appartenenti alle meccaniche ed ai movimenti locali, circa alle quali aveva sino dai primi anni della sua gioventù dato principio a speculare con attenta cura; conciossiachè fino dall'anno 1590, che egli la prima volta era Lettore nella celebratissima Università di Pisa, avendo il primo di tutti esaminato le leggi che osserva il moto naturale ed il violento, e sopra di esse fatti varj esperimenti, questi pubblicamente fece vedere; e quindi avendole geometricamente dimostrate, incominciò le sue dimostrazioni a conferire col March. Guido Ubaldo dal Monte, che della loro eccellenza essendo giustissimo conoscitore, gli fece animo, e il confortò, e l'accese a seguire costantemente così nuovo e profondo studio. Il che essendo stato fatto dal Galileo nel lungo corso di molti anni, e trovandosi di avere interamente conseguito quanto era bisognevole per queste novelle scienze, il tutto diviso e distinto con bell' ordine in quattro Dialoghi, li consegnò al Conte di Noailles, della sua insigne virtù parzialissimo ammiratore, i quali poi a lui dedicati, si videro impressi in Leida l'anno 1638 insieme coll'Appendice del centro di gravità di alcuni solidi. Non si puote appieno ridir con parole quanta fosse l'ammirazione con cui questa segnalatissima opera fu ricevuta, veggendo in essa i giusti stimatori della virtù il verace ritratto della gran mente del Galileo, che prodotta l' aveva. Non andarono tuttavia esenti dall'obbiezioni questi Dialoghi, poichè varie in diversi tempi ne sono state fatte, le quali non hanno avuto altra forza, nè ad altro sono servite, che a far sì che *quivi come oro, che nel fuoco affina*, più risplendenti sieno elleno divenute e più preziose. Molte cose contro alla dottrina del Moto oppose il Cartesio, ma di leggieri momento e con frettolosa penna, e senza

esaminare squisitamente ciò che in essa si contiene; fra le quali la principale si è nell' Epistola 91 della parte seconda, nella quale egli taccia il Galileo di non aver bene considerata tutta questa scienza insieme, ma che solamente abbia avuto in vista le ragioni di alcuni effetti particolari, e tralasciate le prime cause della natura, e così, dice egli, *sine fundamento aedificasse.* Il che afferma, perchè aveva veduto, nel dialogo del Moto, che il Galileo supponeva per principio, i gradi della velocità del medesimo mobile sopra diversi piani inclinati allora essere eguali quando abbiano la medesima elevazione sopra il piano orizzontale. Nel che averebbe avuto ragione il Cartesio, quando il principio supposto dal Galileo come noto, fosse stato ritrovato falso, nel qual caso sarebbe stato senza fallo un edificare senza fondamento; ma non è già in verun conto da ammettersi ciò che egli con troppo amara riprensione francamente pronunziò, quando il principio adoperato si trova esser vero, come appunto seguì al Galileo; il quale appresso dimostrò ciò che prima aveva supposto, facendo vedere che *i gradi di velocità di un mobile descendente con moto naturale dalla medesima sublimità per piani in qualsivoglia modo inclinati, all'arrivo all' orizzonte son sempre eguali, rimossi gl' impedimenti.* La dimostrazione di questo teorema fu quella che egli mandò, subito che l'ebbe investigata, al Padre Abate Castelli, e che fu dipoi inserita nel terzo Dialogo nell' impressione dell'Opere del Galileo fatta in Bologna. Questa medesima proprietà la confermò ancora il Torricelli in varj modi nel suo trattato del Moto, allorchè non ancora aveva avuto notizia di quella del Galileo; e la medesima passione volle autenticare Cristiano Ugenio nella sua opera trattante del moto de' pendoli, e l'istessa pure è stata da altri geometri ancora confermata e stabilita. Vi fu chi si oppose alla proporzione trovata dal Galileo de' momenti de' gravi sopra i piani inclinati, pretendendo che fosse falsa la dimostrazione, e che detti momenti non potessero stare fra di loro come i seni retti degli angoli dell' elevazione de' piani sopra l' orizzontale. Fu discoperta la falsità di tale opposizione, e molti furono quelli che vera dimostrarono essere la proposizione del Galileo; ma per avventura sarebbe stata risposta più precisa il dimostrare che non è il medesimo tenere il grave sopra il piano inclinato, e con una corda parallela al

detto piano, nella guisa che fa il Galileo, ed il sostenere il grave con un altro piano tangente per la parte di sotto, come vuole l'oppositore: e questa differenza si puote agevolmente dimostrare, siccome si trova d'aver fatto un chiarissimo ed insigne geometra. Il Cartesio avendo fatto, come poco dianzi ho avvertito, un'aspra censura al Galileo, nella suddetta lettera non dubitò d'asserire che di niuna cosa meglio che della musica avesse scritto; ma ben presto pentito di questa piccola lode che gli attribuisce, e volendola in biasimo rivoltare, dice che tali cose erano basse e volgari, e a lui ed al Mersenno, al quale è quella lettera indirizzata, molto ben note. Debole si è certamente questa taccia, e non degna del gran talento del Cartesio, e siccome dell'altre fatte da esso al Galileo, per la sua frivolezza da non farne nè pur conto, comecchè essendo generale, e non discendendo a far conoscere in che consista la bassezza della dottrina che egli vuole impugnare come volgare, non ad altro serve che a far manifesto il mal temperato animo del Cartesio, che la fama grandissima della virtù del Galileo mal poteva sostenere, e per quanto era in lui tentava d'oscurare (1).

(1) Rispetto alle opposizioni di Cartesio, non sarà discaro al lettore che da noi si riferisca quello che ne dice il P. Brenna nella vita da lui scritta di Galileo.

« Il Cartesio protestandosi filosofo parve facesse della natura delle cose un poema, frattanto che il nostro Galileo imparava e descriveva dirò così la storia vera della natura. Il Cartesio co' suoi vortici (seppur son suoi e non di Giordano Bruno) imbarazzò di nuovo e rovinò la filosofia liberata allora dal giogo degli scolastici ; ed avendo introdotto nella medesima il metodo delle ipotesi, non egli solo cadde nel falso, ma diede anche a' suoi discepoli in mille cose occasione di errare. Il Galileo all'incontro esaminando con diligenza ciò che fa la natura, piuttosto che cercare le cagioni per le quali ella agisce, fece al tempo de' nostri avi ciò che i dotti pregiano tanto nel metodo dell'età nostra : nè altro metodo di ragionare tenne prima di Newton che la via stessa di Newton. Onde ciò di che il Cartesio soleva darsi vanto ; « ch' egli aveva » indagato le cause generali dei fenomeni e i fini di tali cause, mentre il Ga» lileo si tratteneva a conoscere soltanto gli effetti e le parti del mondo » ; ciò appunto è bastante per dimostrare ad evidenza, di quanto l' Archimede Etrusco superasse il Francese Empedocle. Imperciocchè le cose, che il Cartesio credette d' aver tanto agevolmente compreso, rimangono tuttavia sepolte ed ascose da dense tenebre ; di modo che o non vi è nissuna via d' intender-

» Altre obbiezioni vi sono state molto più forti contro a ciò che della musica scrisse il Galileo, alle quali tuttavia ampiamente si soddisfà e si risponde, e la saldezza di questa dottrina si fa più chiara e palese. Il Priore Orazio Rucellai ne' suoi maravigliosi Dialoghi, nel secondo di quelli che ragionano sopra il Timeo di Platone intorno alla musica, riporta una molto salda e gagliarda opposizione in questa guisa: riferisce egli ciò che dice il Galileo nella prima Giornata, che la forma degl' intervalli musici si è la proporzione de' numeri delle vibrazioni e percosse dell' onde dell' aria che vanno a ferire il timpano dell' orecchio, il quale esso ancora sotto le medesime misure di tempi vien fatto tremare; dal che ne deduce che più grate sono quelle consonanze, di cui le vibrazioni più presto si riuniscono e sono commensurabili, laddove crudissime sarebbero le dissonanze quando i tempi delle vibrazioni fossero incommensurabili. Il che egli poscia fa vedere con alcuni fili di diverse lunghezze, le vibrazioni de' quali rispondono a quelle degl' intervalli musici, i quali quando sono consonanti, sono tali gl' intrecciamenti de' fili, che in determinati tempi e dopo determinati numeri di vibrazioni tutti i fili, sieno tre o sieno quattro, s'accordano a giugnere nel tempo istesso al termine delle loro vibrazioni, e lì ricominciano un altro simile periodo; ma quando le vibrazioni di due o di più fili sieno incommensurabili, sicchè mai non ritornino a terminare concordemente sotto determinati numeri, o se pur non essendo incommensurabili vi ritornino dopo lungo tempo e dopo gran numero di vibrazioni, allora siccome la vista si confonde nell' ordine discorde d'uno sregolato intrecciamento, così l'udito con noia e con dissonanza riceve le percosse mal temperate de' tremori dell' aria, che senza misura e senza regola vanno a colpire sopra il timpano dell' orecchio. Contro a questa dottrina del Galileo, dice il Rucellai che alcuni pratici molto intendenti della musica, eziandio della teorica, oppongono in tal modo. Dicono essi che i fili in quelle misure assegnate, che s'affermano per commensurabili, tornino di tanto in

le, o vi è quella sola, che fu seguita dal nostro investigatore e scrutatore della natura..... Di quanto dico ne chiamo giudici coloro, che letto abbiano i libri del Cartesio e del Galileo, e si ricordano in qual tempo fossero pubblicati gli uni e gli altri ».

tanto ad unirsi, perchè si muovono in un istesso momento di tempo, ma se fossero mossi in momenti diversi sarebbero incommensurabili. Ora applicando ciò alle corde, anche queste movendosi in diversi tempi, le vibrazioni loro verrebbero ad essere incommensurabili, e nondimeno mentre sien tese in consonanza, ancorchè non si tocchino tutte insieme, ma una appresso l'altra, tuttavia si trovano sempre restar consonanti; e pure non si toccando nello stesso tempo le vibrazioni, non vengono giammai ad unirsi, e però sono incommensurabili: adunque non si può fermare per assioma sicuro che la cagione delle consonanze venga dalle vibrazioni commensurabili. Oltre a ciò dove il Galileo afferma che se le vibrazioni fossero molto lunghe a tornare ad unirsi, ancorchè fossero commensurabili, sarebbero tuttavia dissonanti, vogliono questi oppositori, che ciò non riesca vero: imperciocchè ci sono delle consonanze che hanno maggiori vibrazioni, che alcune dissonanze non hanno, e perciò non essere la regola data dal Galileo certa ed infallibile. Questi pratici, che in somigliante guisa, come riferisce il Rucellai, opposero al Galileo, non altri furono, se io non fallo, che Francesco Nigetti, uomo della musica intendentissimo, che la sua obbiezione in tal maniera produceva. Se prendiamo, diceva egli, la proporzione della sesta minore, che è di otto a cinque, certo è che mentre la corda grave darà cinque vibrazioni, l'acuta ne darà otto, sicchè fra l'una e l'altra corda l'orecchio sentirà tredici vibrazioni. Pigliando poi la proporzione di sette a cinque, forma della più aspra dissonanza, che ritrovar si possa, nondimeno questa averà meno vibrazioni della sesta minore, e pure si riunirà più presto, e tuttavia sarà dissonante: sì che non è vero che le consonanze consistano nella commensurabilità, o nel riunirsi più presto. Per rispondere a questa opposizione, con lungo ragionamento mostra il Rucellai, non potersi dirittamente inferire contro una ragione teorica, che ella non sia vera perciocchè nella pratica non si vede riuscire, onde egli dice che si scorge nelle dimostrazioni più infallibili geometriche, o dell'ottica o dell'altre scienze, le quali non possono errare, che sovente alla pratica non riescono, e ciò non per difetto della dimostrazione, ma o di noi medesimi o di ciò che vi si adopera, che non s'aggiusta per l'appunto alle regole. Ma

perchè questa risposta del Rucellai puote sembrare forse ad alcuno soverchiamente generale, benchè ella sia e convenevole e vera, penso che più particolarmente rispondere si possa, e soddisfare all' opposizione, dicendo che nella musica pratica, e particolarmente nella moderna, gli accordi non sono reali e geometrici ma partecipati, e non di giustissima misura; talchè nella division dell' ottava, per cagion d' esempio, la quinta e la quarta, che la riempiono, non sono le due proporzioni sesquialtera e sesquiterza, che riempiono la dupla, forma di essa ottava, ma la quinta è un poco meno, o come i pratici dicono è un poco spuntata, e questo spuntamento accresce un poco la quarta, e così le proporzioni delle consonanze non sono in pratica giustamente le pittagoriche; laonde in fatti si vede, che accordando gli strumenti colle quinte giuste cavate dal monocordo, riescono essi male accordati e dissonanti. E di vero egli è certo, che nell' operazioni de' sentimenti, le quali si debbon fare per via di moto, vi si ricerca tempo per ricevere l' impressioni degli oggetti: e perciò anche ne' suoni dovendosi ricever sul timpano dell' orecchio l' impressioni delle vibrazioni delle corde con tempo, il moto del timpano viene a rendere, in certo modo, alterato il movimento ed il tempo delle vibrazioni; onde qualche convenevol correzione vi si richiede. Dal che si deduce che le regole prescritte dalla teorica, che le cose considera rimossi tutti gl' impedimenti materiali, si debbono applicare alla pratica con accuratezza e con senno, e che non dee recar maraviglia se alcune quivi non tornano con intera esattezza, *perchè a risponder la materia è sorda.* Per la qual cosa apparisce, che allora quando il Nigetti dice, che nella sesta minore vi è più numero di vibrazioni che nella proporzione di sette a cinque, forma d' una asprissima dissonanza, ciò addiviene perchè gli accordi non sono giusti, ma partecipati, che vuol dire che non è altrimenti vero geometricamente che quelle vibrazioni sieno di quel numero che disegna la pratica, colpa degl' impedimenti materiali, che si frappongono; che se noi potessimo avere le misure cotanto esatte in così minime differenze, come le ha la natura, si perverrebbe bentosto alla perfezione, la quale sarebbe consonante e di giocondissima armonia: ma la più esatta squisitezza de' calcoli, che da noi si fanno, non ha tante e così sottili

partizioni e suddivisioni, e perciò è imperfezione nella natura, e quella che sembra a noi imperfezione, alla natura è intera perfezione e compita. All'opposizione fatta dal Nigetti al Galileo, perchè la ragione d'otto a cinque, forma della sesta minore, sia consonanza, e non quella di sette a cinque, dove pure le vibrazioni più spesso s'uniscono, altre risposte, oltre a quella da me addotta, potrebbero darsi, ma per non allungarmi di soverchio vaglia per tutte quella d'alcuni sottilissimi intendenti della teorica della musica, i quali dicono che la ragione si è perchè il complemento di questo intervallo, otto a cinque, per andare all'ottava, che sarebbe cinque a quattro, è una terza maggiore per sè stessa consonante; laddove il complemento all'ottava dell'intervallo sette a cinque, che sarebbe dieci a sette, non è altrimenti consonanza veruna, e come dice il Fontenelle nell'Istoria dell'Accademia reale delle scienze del 1701, riferendo l'opinione del Sauveur, che avendo ogni operazione naturale i suoi limiti, ancora l'aggradimento dell'anima circa il concorso di più vibrazioni si termina nella proporzione naturale de' numeri dall'uno al sei, in cui si comprende la forma dell'ottava, uno a due; della quinta, due a tre, della quarta, tre a quattro; della terza maggiore, quattro a cinque; e della terza minore, cinque a sei; oltre ai composti di una o due ottave con ciascuno de' sopraddetti intervalli, come uno a tre, che comprende un'ottava colla quinta; uno a quattro, che è di due ottave; uno a cinque, che è di due ottave e della terza maggiore; uno a sei di due ottave e della terza minore; due a cinque, che esprime un'ottava colla terza maggiore. E gli altri intervalli non sembrano consonanti se non per accidente, in quanto sono la differenza di qualche intervallo consonante e dell'ottava, che facilmente vien supplita dall'anima e sottintesa per la sua facilità e semplicità; ed in ciò il mentovato Autore così s'esprime: *Un accord qui de lui-même ne plairait point, plaira s'il achève l'octave d'un autre accord agréable; ce dernier accord entendu plusieures fois avec plaisir, aura conduit l'âme à imaginer ce qui y manquait pour aller jusqu'à l'octave, et comme l'octave lui plait, l'accord, qui en est le complement, se sera lié à une idée agréable. Ainsi l'accord de 8 à 5 tire tout son agrément de ce qu'il remplit l'octave de 5 à 4.*

» Altre difficultà son state fatte a questi Dialoghi delle nuove scienze, poichè vi fu chi pretese d'aver trovato un paralogismo nella dimostrazione del moto de' gravi secondo la proporzione de' numeri impari dall' unità, a cui con tre lettere dottamente rispose il Gassendo, il quale l'opinione del Galileo difese ancora nella lettera che egli scrisse a Pietro del Pozzo *De motu impresso, a motore translato.* Altri trovarono difficultà in ammettere ciò che mostra di credere il Galileo, che la corda lente e la linea del moto dei projetti sieno linee paraboliche, e questi sono quelli che la linea da essi detta catenaria, e la velaria vogliono dimostrare essere altra sorta di linee. Ma che il moto dei projetti si faccia per linee paraboliche è ammesso per certo e indubitato da uomini dottissimi, fra' quali mi piace di nominare solamente il Conte Ferdinando Herbestein nella sua Ciclodiatomia, venuta alla luce l'anno 1716, che ben fa ritratto, siccome il fanno l'altre sue dottissime opere, della dottrina e della profondità dell' ingegno di questo grandissimo geometra; ed il somigliante tenne e dimostrò il Borelli nel libro *De motibus naturalibus a gravitate pendentibus,* in cui fa vedere che la natura molte cose opera per mezzo di linee paraboliche, e che sino il fumo nel vuoto per una somigliante linea si muove. Più singolari, e meritevoli di maggior biasimo, sono le opposizioni a quest'opera del Galileo fatte da coloro che gli hanno attribuito cose, che egli per verità non ha detto e nè pure ha pensato giammai. Fra questi debbe essere annoverato l' Autore della Prefazione all' opera de' Principj Matematici della Filosofia naturale del Cav. Newton, stampata in Amsterdam nel 1714, il quale dopo aver detto: *Docuit Galilaeus lapidis projecti, et in parabola moti, deflexionem a cursu rectilineo oriri a gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate;* non dubitò poco dopo d' aggiugnere: *Quis vero non subsannabit bonum illum Galilaeum, qui magno molimine mathematico, qualitates occultas e Philosophia feliciter exclusas denuo revocare substinuerit.* I quali scherni, e le derisioni e le beffe, di cui egli senza ragione alcuna vuol che sia meritevole il Galileo, ricadono certamente e con intera giustizia sopra di lui, il quale o non avendo per avventura letto, o non avendo inteso i Dialoghi delle scienze nuove, con temerario e villano ardire tenta d'attribuirgli cosa, che

egli non ha detto giammai, e con una falsità manifesta pretende di volere oscurar la gloria d'un filosofo così riputato e così grande; altronde poi richiamando nella filosofica scena le già sbandite, e del tutto screditate attrazioni mutue di qualsivoglia sorta di corpicciuoli, per assegnare occulte cagioni, non mai da veruno chiaramente spiegate nè intese. degli effetti notissimi e manifesti che in natura veggiamo.

» Non molto dissomigliante a questa strana imputazione si è quella che gli dà un' altro moderno scrittore in un suo Trattato sopra la Laguna di Venezia, nel quale dice che il Galileo in altri suoi Dialoghi, diversi da questi delle scienze nuove (1), racconta che vi fossero alcuni filosofi, che pensavano che la massa dell' acqua fosse mossa dall' ottava sfera, e che in vigore della medesima, in ogni giro di settanta anni, da una parte si facesse un tal cangiamento, per cui dopo lungo periodo quel che è mare si cangiasse in terra, ed all' incontro si mutasse in mare quanto adesso è continente. A questa vana opinione, che l'autore di questo Trattato vuole che il Galileo riponga nel terzo di quei suoi Dialoghi, con filosofico avvedimento dice di prestare quella fede, che si figura che vi prestasse il Galileo medesimo; nel che certamente non va egli ingannato, poichè il Galileo, non che prestar fede ad un così strano ragionamento, nè pure fa mai parola nel terzo Dialogo dell' acqua mossa dall' ottava sfera, come gli va questo scrittore attribuendo, ed. allorchè nel quarto Dialogo parla dell' acqua mossa dal primo mobile, ciò fa ad altro proposito, nè mai produce così stravagante sentenza ».

A queste dotte osservazioni ci è grato aggiungere la testimonianza del celebre Lagrange, che giustamente accompagna al nome di Galileo quello di un altro illustre toscano, del quale la scienza e lo Stato deplorano tuttora la perdita; e ciò colle parole di un giudice competentissimo in cosiffatte materie, il cavalier G. B. Venturi (2).

(1) Allude ai Dialoghi dei Massimi Sistemi.

(2) Nel fine della seconda parte delle sue *Memorie e Lettere* ec

« Il celebre Lagrange, a cui la Geometria Italiana è stata debitrice dello stabilimento della sua superiorità in Europa, nella grand'opera della *Meccanica analitica*, riconosce Galileo come autore non solo del principio della composizione delle forze, ma ancora di quello delle velocità virtuali, dai quali principj, e dalla esatta nozione dei movimenti, parimente dovuta a Galileo, la scienza dell' equilibrio dei solidi e dei fluidi acquista un procedere uniforme e indipendente dai varj sistemi e dalle incerte direzioni che seguirono i successori di Galileo sino a tanto che non comparve la sopra citata opera del Lagrange.

» Questo prova ancora che si debbono a Galileo i più saldi fondamenti della scienza del Moto, giacchè avanti di lui non erano state considerate le forze applicate ai corpi, altro che in istato di equilibrio. In conseguenza gli applausi che si debbono a Galileo, non solo si appoggiano alle di lui già note scoperte, ma ancora a certi semi, alcuni dei quali giacciono forse tuttora negletti o poco valutati nelle di lui opere, e che ponno dar luogo allo sviluppo di ulteriori importanti invenzioni, come seguì del principio delle velocità virtuali, che giacque oscuro finchè dal genio di Lagrange non fu preso in considerazione e fattone l' uso di cui era suscettibile.

» Questo principio era adottato come sicuro per la conformità dei suoi risultati con quelli ottenuti da altri principj matematicamente dimostrati; ma una dimostrazione di questo fu sempre desiderata dai geometri fino al 1796.

» In quell' anno Vittorio Fossombroni pubblicò colle stampe di Firenze una Memoria sul principio delle velocità virtuali, e ne dette la prima dimostrazione capace di mettere questo principio al sicuro da ogni attacco di dubbiezza. Oltre all'equazione dei momenti, che Lagrange stabilisce appartenere ai differenziali, il Fossombroni trova tutti i casi, nei quali l' equazione stessa si verifica ancora in differenze finite; e per conseguenza ne deduce la cognizione di un nuovo genere di equilibrii, nel qual genere il sistema non altera il proprio equilibrio, ancorchè la sua posizione soffra una variazione non solo infinitesima, ma finita.

» Lo stesso Lagrange convenne di tutto ciò, e ne scrisse al Fossombroni nel 31 maggio 1797 ne'seguenti termini: *J'ai lu vôtre*

ouvrage avec plaisir. S'il y a encôre quelque chose à désirer dans la Mécanique, c'est le rapprochement et la réunion des principes, qui lui servent de base, et peut-être même la démonstration rigoureuse et directe de ces principes. Votre travail est un nouveau service rendu à cette science. Vous observez avec raison, qu'il y a des cas où l'équation des vitesses virtuelles a lieu aussi par rapport aux différences finies ; le sistême alors en changeant de situation ne cesse pas d'être en équilibre. Ces sortes d'équilibres tiennent le milieu entre les équilibres stables, où le sistême revient de lui même à son premier état, lorsqu'il en est dérangé, et les équilibres non stables, où le sistême, une fois dérangé de son état d'équilibre, tend à s'en éloigner de plus en plus.

» Onde ben a ragione fu scritto in un un rapporto della *Décade philosophique, littéraire et politique* del dì 8 giugno 1797 : *È gloria della Toscana, la quale si onora d'esser patria del celebre Galileo, scopritore di questo principio, il ripeterne da un altro suo connazionale la prima dimostrazione* (1) ».

(1) *Il est glorieux pour la Toscane, qui s'honore d'être la patrie du célèbre Galilée, auteur de la decouverte de ce principe, d'être redévable de sa première démonstration à un Savant distingué, qu'elle a vû naître, et qu'elle renferme aujourd'hui dans son sein.*



LO STAMPATORE AI LETTORI.

(Edizione originale di Leida del 1638).

Trattenendosi la vita civile mediante il mutuo e vicendevole soccorso degli uomini gli uni verso gli altri, ed a ciò servendo principalmente l' uso delle arti e delle scienze, per questo gl' inventori di esse sono sempre stati tenuti in grande stima, e molto riveriti dalla savia antichità ; e quanto più eccellente o utile è stata qualche invenzione, tanto maggiore laude e onore ne è stato attribuito agl' inventori, fin ad essere stati deificati (avendo gli uomini per comun consenso, con tal segno di supremo onore, voluto perpetuare la memoria degli autori del loro ben essere). Parimente quelli, i quali con l' acutezza dei loro ingegni hanno riformato le cose già trovate, scoprendo le fallacie e gli errori di molte e molte proposizioni portate da uomini insigni e ricevute per vere per molte età, sono degni di gran lode e ammirazione ; atteso medesimamente che tale scoprimento è laudabile, se bene i medesimi scopritori avessero solamente rimossa la falsità senza introdurre la verità per sè tanto difficile a conseguirsi, conforme al detto del principe degli oratori: Utinam tam facile possem vera reperire, quam falsa convincere. *E infatti il merito di questa lode è dovuto a questi nostri ultimi secoli ; nei quali le arti e le scienze ritrovate dagli antichi per opera di perspicacissimi ingegni sono, per molte prove ed esperienze, state ridotte a gran perfezione, la quale ogni dì va augumentandosi. E in particolare questo apparisce nelle scienze*

matematiche; nelle quali (lasciando i diversi che ci si sono adoperati con gran lode e con gran successo) al nostro Signore Galileo Galilei Accademico Linceo, senza alcun contrasto, anzi con l'applauso e l'approvazione universale di tutti i periti, meritamente sono dovuti li primi gradi, sì per aver mostrato la non concludenza di molte ragioni intorno a varie conclusioni, con dimostrazioni confermate (come ne sono piene le opere sue già pubblicate), sì anco per aver col telescopio (uscito prima di queste nostre parti, ma da esso ridotto poi a perfezione molto maggiore) scoperto, e data prima di tutti la notizia delle quattro stelle satelliti di Giove, della vera e certa dimostrazione della via lattea, delle macchie solari, della rugosità e parti nebulose della Luna, di Saturno tricorporeo, di Venere falcata, della qualità e disposizion delle comete; tutte cose non conosciute mai dagli astronomi nè dai filosofi antichi. Di maniera che puote dirsi, esser per esso con nuova luce comparsa al mondo e ristorata l'astronomia, dall'eccellenza della quale (in quanto nei cieli e nei corpi celesti, con maggiore evidenza e ammirazione che in tutte le altre creature, risplende la potenza, sapienza e bontà del supremo Fattore) risulta la grandezza del merito di chi ce ne ha aperta la conoscenza, con averci resi tali corpi distintamente conspicui, non ostante la loro distanza quasi infinita da noi: poichè, secondo il dire volgato, l'aspetto insegna assai più e con maggior certezza in un sol giorno che non potriano fare i precetti, quantunque mille volte reiterati; la notizia intuitiva (come disse un altro) andando del pari con la difinizione. Ma molto più si fa manifesta la grazia concedutagli da Dio e dalla natura (per mezzo però di molte fatiche e vigilie) nella presente opera, nella quale si vede, lui essere stato ritrovatore di due intere scienze nuove, e dai loro primi principj e fondamenti concludentemente cioè geometricamente dimostrate: e quello che deve rendere più maravigliosa quest'opera, una delle due scienze è intorno a un suggetto eterno, principalissimo in natura, speculato da tutti i gran filosofi, e sopra il quale sono moltissimi volumi scritti: parlo del moto locale, materia d'infiniti accidenti ammirandi, nessuno de' quali è fin qui stato trovato, non che dimostrato da alcuno: l'altra scienza,

pure dai suoi principj dimostrata, è intorno alla resistenza che fanno i corpi solidi all' essere per violenza spezzati; notizia di grande utilità, massime nelle scienze ed arti meccaniche, ed essa ancora piena d' accidenti e proposizioni sin qui non osservate. Di queste due nuove scienze, piene di proposizioni che in infinito saranno accresciute col progresso del tempo dagl' ingegni speculativi, in questo libro si aprono le prime porte, e con non piccolo numero di proposizioni dimostrate si addita il progresso e trapasso ad altre infinite; sì come dagl' intelligenti sarà facilmente inteso e riconosciuto.

INTERLOCUTORI

SALVIATI — SAGREDO — SIMPLICIO.

GIORNATA PRIMA,

INTORNO

LA COERENZA DELLE PARTI DE' CORPI SOLIDI.

Salv. Largo campo di filosofare agl' intelletti speculativi parmi che porga la frequente pratica del famoso arsenale di voi signori Veneziani, ed in particolare in quella parte che Meccanica si domanda; attesochè quivi ogni sorta di strumento e di macchina vien continuamente posta in opera da numero grande di artefici, tra i quali, e per le osservazioni fatte dai loro antecessori, e per quelle che di propria avvertenza vanno continuamente per sè stessi facendo, è forza che ve ne siano dei peritissimi e di finissimo discorso.

Sagr. V. S. non s' inganna punto: ed io, come per natura curioso, frequento per mio diporto la visita di questo luogo e la pratica di questi che noi, per certa preminenza che tengono sopra il resto della maestranza, domandiamo proti; la conferenza dei quali mi ha più volte aiutato nell' investigazione della ragione di effetti non solo maravigliosi, ma reconditi ancora e quasi inopinabili. È vero che talvolta anco mi ha messo in confusione e in disperazione di poter penetrare come possa seguire quello che, lontano da ogni mio concetto, mi dimostra il senso esser vero; e pur quello che poco fa ci diceva quel buon vecchio è un dettato ed una proposizione bene assai vulgata; ma però io la reputava in

tutto vana, come molte altre che sono in bocca dei poco intelligenti, da loro, credo, introdotte per mostrar di saper dir qualche cosa intorno a quello di che non sono capaci.

Salv. V. S. vuol forse dire di quell' ultimo pronunziato ch' ei proferì mentre ricercavamo d' intendere per qual ragione facevano tanto maggior apparecchio di sostegni, armamenti ed altri ripari e fortificazioni intorno a quella gran galeazza che si doveva varare, che non si fa intorno a' vascelli minori; dove egli rispose ciò farsi per evitare il pericolo di direnarsi, oppressa dal gravissimo peso della sua vasta mole; inconveniente al quale non son soggetti i legni minori?

Sagr. Di cotesto intendo, e sopra tutto dell' ultima conclusione ch' ei soggiunse, la quale io ho sempre stimata concetto vano del vulgo; cioè che in queste ed altre simili macchine non bisogna argomentare dalle piccole alle grandi; perchè molte invenzioni di macchine riescono in piccolo, che in grande poi non sussistono. Ma essendo che tutte le ragioni della meccanica hanno i fondamenti loro nella geometria (nella quale non vedo che la grandezza e la piccolezza faccia i cerchi, i triangoli, i cilindri, i coni e qualunque altre figure solide soggette ad altre passioni queste, e ad altre quelle) quando la macchina grande sia fabbricata in tutti i suoi membri conforme alle proporzioni della minore, che sia valida e resistente all' esercizio al quale ella è destinata, non so vedere perchè essa ancora non sia esente dagl' incontri che sopraggiugner le possono sinistri e distruttori.

Salv. Il detto del vulgo è assolutamente vano, e talmente vano che il suo contrario si potrà profferire con altrettanta verità, dicendo che molte macchine si potranno far più perfette in grande che in piccolo; come per esempio un oriuolo, che mostri e batta le ore, più giusto si farà di una tal grandezza che di un' altra minore. Con miglior fondamento usurpano quel medesimo detto altri più intelligenti, i quali della riuscita di tali macchine grandi, non conforme a quello che si raccoglie dalle pure ed astratte dimostrazioni geometriche, ne rimettono la causa nell' imperfezione della

materia, che soggiace a molte alterazioni ed imperfezioni. Ma qui non so s' io potrò, senza inciampare in qualche nota di arroganza, dire che nè anco il ricorrere alle imperfezioni della materia, potenti a contaminare le purissime dimostrazioni matematiche, basti a scusare l' inobbedienza delle macchine in concreto alle medesime astratte e ideali: tuttavia io pure il dirò, affermando che, astraendo tutte le imperfezioni della materia, e supponendola perfettissima ed inalterabile, e da ogni accidental mutazione esente, tuttavia il solo esser materiale fa che la macchina maggiore, fabbricata dell' istessa materia e con l' istesse proporzioni che la minore, in tutte l' altre condizioni risponderà con giusta simmetria alla minore, fuor che nella robustezza e resistenza contro alle violenti invasioni; e quanto più sarà grande, tanto a proporzione sarà più debole. E perchè io suppongo la materia esser inalterabile, cioè sempre l' istessa, è manifesto che di lei, come di affezione esterna e necessaria, si possono produr dimostrazioni non meno dell' altre schiette e pure matematiche. Però, Sig. Sagredo, revochi pur l' opinione che teneva, e forse insieme con tutti gli altri che nella meccanica han fatto studio, che le macchine e le fabbriche composte delle medesime materie, con puntuale osservanza delle medesime proporzioni tra le loro parti, debban essere egualmente o, per dir meglio, proporzionalmente disposte al resistere e al cedere alle invasioni ed impeti esterni, perchè si può geometricamente dimostrare sempre le maggiori essere a proporzione men resistenti che le minori; sì che ultimamente non solo di tutte le macchine e fabbriche artifiziali, ma delle naturali ancora, sia un termine necessariamente ascritto, oltre al quale nè l' arte nè la natura possa trapassare: trapassar, dico, con osservar sempre l' istesse proporzioni coll' identità della materia.

Sagr. Io già mi sento rivolgere il cervello, e quasi nugola dal baleno repentinamente aperta, ingombrarmisi la mente da momentanea ed insolita luce, che da lontano mi accenna, e subito confonde ed asconde immaginazioni straniere ed indigeste. E da quanto ella ha detto parmi che dovrebbe seguire che fusse impossibil cosa costruire due fabbriche del-

l'istessa materia simili e diseguali, e tra di loro con egual proporzione resistenti; e quando ciò sia, sarà anco impossibile trovar due sole aste dell'istesso legno tra di loro simili in robustezza e valore, ma diseguali in grandezza.

SALV. Così è, Sig. Sagredo; e per meglio assicurarci che noi convenghiamo nel medesimo concetto, dico che se noi ridurremo un' asta di legno a tal lunghezza e grossezza, che fitta, v. g., in un muro ad angoli retti, cioè parallela all'orizzonte, sia ridotta all'ultima lunghezza che si possa reggere, sì che, allungata un pelo più, si spezzasse gravata dal proprio peso, questa sarà unica al mondo; sì che essendo, per esempio, la sua lunghezza centupla della sua grossezza, nessun' altra asta della medesima materia potrà ritrovarsi che, essendo in lunghezza centupla della sua grossezza, sia come quella precisamente abile a sostener sè medesima, e nulla di più; ma tutte le maggiori si fiaccheranno, e le minori saranno potenti a sostenere oltre al proprio peso qualche altro appresso. E questo che io dico dello stato di regger sè medesimo, intendasi detto di ogni altra costituzione; e così se un corrente potrà reggere il peso di dieci correnti suoi eguali, una trave simile a lui non potrà altramente reggere il peso di dieci sue eguali. Ma notino in grazia V. S. e il Sig. Simplicio nostro quanto le conclusioni vere, benchè nel primo aspetto sembrino improbabili, additate solamente qualche poco, depongono le vesti che le occultavano, e nude e semplici fanno de' loro segreti gioconda mostra. Chi non vede come un cavallo cadendo da un' altezza di tre braccia o quattro si romperà le ossa, ma un cane da una tale, e un gatto da una di otto o dieci, non si farà mal nessuno, come nè un grillo da una torre, nè una formica precipitandosi dall' orbe lunare? I piccoli fanciulli restano illesi in cadute, dove i provetti si rompono gli stinchi o la testa. E come gli animali più piccoli sono, a proporzione, più robusti e forti dei maggiori, così le piante minori meglio si sostentano: e già credo che amendue voi apprendiate che una quercia dugento braccia alta non potrebbe sostenere i suoi rami sparsi alla similitudine di una di mediocre grandezza, e che la natura non

potrebbe fare un cavallo grande per venti cavalli, nè un gigante dieci volte più alto di un uomo, se non o miracolosamente o coll'alterar assai le proporzioni delle membra, ed in particolare dell'ossa, ingrossandole molto e molto sopra la simetria dell'ossa comuni. Il creder parimente che nelle macchine artifiziali ugualmente siano fattibili e conservabili le grandissime e le piccole, è errore manifesto: e così, per esempio, piccole guglie, colonnette ed altre solide figure sicuramente si potranno maneggiare, distendere e rizzare senza risico di rompersi, che le grandissime per ogni sinistro accidente anderanno in pezzi, e non per altra cagione che pel loro proprio peso. E qui è forza che io vi racconti un caso degno veramente di esser saputo, come sono tutti gli accidenti che accadono fuori dell'aspettazione, e massime quando il partito preso per ovviare a uno inconveniente riesce poi causa potissima del disordine. Era una grossissima colonna di marmo distesa e posata presso alle sue estremità sopra due pezzi di trave; cadde in pensiero, dopo certo tempo, ad un meccanico che fosse bene, per maggiormente assicurarsi che gravata dal proprio peso non si rompesse nel mezzo, supporgli anco in questa parte un terzo simile sostegno: parve il consiglio generalmente molto opportuno, ma l'esito lo dimostrò essere stato tutto l'opposito, attesochè non passarono molti mesi che la colonna si trovò fessa e rotta, giusto sopra il nuovo appoggio di mezzo.

Simp. Accidente in vero maraviglioso e veramente *praeter spem*, quando però fusse derivato dall'aggiugnervi il nuovo sostegno di mezzo.

Salv. Da quello sicuramente derivò egli, e la riconosciuta cagion dell'effetto leva la maraviglia: perchè deposti in piana terra i due pezzi della colonna, si vedde che l'uno dei travi, sul quale appoggiava una delle testate, si era per la lunghezza del tempo infracidato ed avvallato, e restando quel di mezzo durissimo e forte, fu causa che la metà della colonna restasse in aria abbandonata dall'estremo sostegno; onde il proprio soverchio peso le fece fare quello che non avrebbe fatto, se sola sopra i due primi si fusse appoggiata,

perchè all'avvallarsi qual si fusse di loro, ella ancora l'avrebbe seguìto. E qui non si può dubitare che tal accidente non sarebbe avvenuto in una piccola colonna, benchè della medesima pietra e di lunghezza rispondente alla sua grossezza colla proporzione medesima della grossezza e lunghezza della colonna grande.

SAGR. Già sin qui resto io assicurato della verità dell'effetto, ma non penetro già la ragione, come nel crescersi la materia non debba coll'istesso ragguaglio multiplicarsi la resistenza e gagliardia; e tanto più mi confondo, quanto per l'opposito vedo in altri casi crescersi molto più la robustezza e la resistenza al rompersi, che non cresce l'ingrossamento della materia; che se, v. g., saranno due chiodi fitti in un muro, l'uno più grosso il doppio dell'altro, quello reggerà non solamente doppio peso di questo, ma triplo e quadruplo.

SALV. Dite pure ottuplo, nè direte lontano dal vero, *perchè così il dimostrò il nostro Accademico; e un altro giorno il comprenderemo dalla quarta proposizione della sua nuova scienza:* nè questo effetto contraria a quello, ancorchè in sembiante apparisca così diverso.

SAGR. Adunque, Sig. Salviati, spianateci questi scogli e dichiarateci queste oscurità, se ne avete il modo, chè ben conghietturo questa materia delle resistenze essere un campo pieno di belle ed utili contemplazioni; e se vi contentate che questo sia il soggetto dei nostri ragionamenti d'oggi, a me, e credo al Sig. Simplicio, sarà gratissimo.

SALV. Non posso mancar di servirle, purchè la memoria serva me in somministrarmi quello che già appresi dal nostro Accademico, che sopra tal materia aveva fatte molte speculazioni, e tutte, conforme al suo solito, geometricamente dimostrate, in modo che non senza ragione questa sua potrebbe chiamarsi una nuova scienza; perchè sebbene alcune delle conclusioni sono state da altri, e prima di tutti da Aristotile, osservate, tuttavia ne sono delle più belle (e quello che più importa), dai loro primarj e indubitati fondamenti con necessarie dimostrazioni provate. E perchè, come dico, voglio dimostrativamente accertarvi, e non con solamente probabili

discorsi persuadervi (supponendo che abbiate quella cognizione delle conclusioni meccaniche, da altri sin qui fondatamente trattate, che per lo nostro bisogno sarà necessaria), conviene che avanti ogni altra cosa consideriamo quale effetto sia quello che si opera nella frazione di un legno o di altro solido, le cui parti saldamente sono attaccate; perchè questa è la prima nozione, nella qual consiste il primo e semplice principio, che come notissimo conviene supporsi. Per più chiara esplicazione di che: prendiamo il cilindro o prisma AB (*Fig.* 1) di legno o di altra materia solida e coerente, fermato di sopra in A e pendente a piombo, al quale nell'altra estremità B sia attaccato il peso C; è manifesto che qualunque si sia la tenacità e coerenza tra di loro delle parti di esso solido (purchè non sia infinita) potrà esser superata dalla forza del traente peso C (la cui gravità pongo che possa accrescersi quanto ne piace), e esso solido finalmente si strapperà a guisa di una corda. E sì come nella corda noi intendiamo la sua resistenza derivare dalla moltitudine delle fila della canapa che la compongono, così nel legno si scorgono le sue fibre e filamenti distesi per lungo, che lo rendono grandemente più resistente allo strappamento che non sarebbe qualsivoglia canapo della medesima grossezza; ma nel cilindro di pietra o di metallo la coerenza (che ancora par maggiore) delle sue parti dipende da altro glutine che da filamenti o fibre, e pure essi ancora da valido tiramento vengono spezzati.

SIMP. Se il negozio procede come voi dite, intendo bene che i filamenti del legno, che sono lunghi quanto l'istesso legno, posson renderlo gagliardo e resistente a gran forza che se gli faccia per romperlo; ma una corda composta di fili di canapa non più lunghi di due o tre braccia l'uno, come potrà ridursi alla lunghezza di cento restando tanto gagliarda? In oltre vorrei anco sentire la vostra opinione intorno all'attaccamento delle parti dei metalli, delle pietre e di altre materie prive di tali filamenti, che pur, s'io non m'inganno, è anco più tenace.

SALV. In nuove speculazioni, e non molto al nostro in-

tento necessarie, converrà divertire se dovremo delle promosse difficoltà portar le soluzioni.

Sagr. Ma se le digressioni possono arrecarci la cognizione di nuove verità, che pregiudica a noi, non obbligati a un metodo serrato e conciso, ma che solo per proprio gusto facciamo i nostri congressi, digredire ora per non perder quelle notizie, che forse lasciate, l'incontrata occasione un'altra volta non ci si presenterebbe? Anzi chi sa che bene spesso non si possano scoprir curiosità più belle delle primariamente cercate conclusioni? pregovi pertanto io ancora a dar sodisfazione al Sig. Simplicio e a me, non men di esso curioso e desideroso d'intender qual sia quel glutine che sì tenacemente ritien congiunte le parti dei solidi, che pur finalmente sono dissolubili: cognizione che pur anco è necessaria per intender la coerenza delle parti degli stessi filamenti, dei quali alcuni dei solidi son composti.

Salv. Eccomi a servirvi, poichè così vi piace. È la prima difficoltà, come possano i filamenti di una corda lunga cento braccia sì saldamente connettersi insieme (non essendo ciascheduno di essi lungo più di due o tre), che gran violenza ci voglia a dissepararli. Ma ditemi, Sig. Simplicio, non potreste voi di un sol filo di canapa tener l'una dell'estremità talmente stretta fra le dita, che io tirando dall'altra, prima che liberarlo dalla vostra mano, lo rompessi? certo sì: quando dunque i fili della canapa fusser non solo nell'estremità, ma in tutta la lor lunghezza con gran forza da chi li circondasse tenuti stretti, non è manifesta cosa che lo sbarbarli da chi li stringe sarebbe assai più difficile che romperli? ma nella corda l'istesso atto dell'attorcerla stringe le fila scambievolmente tra di loro, in maniera che tirando poi con gran forza la fune, i suoi filamenti si spezzano, e non si separano l'uno dall'altro; come manifestamente si conosce dal vedersi nella rottura i filamenti cortissimi, e non lunghi almeno un braccio l'uno, come dovria vedersi quando la division della corda si facesse non per lo strappamento delle fila, ma per la sola separazione dell'uno dall'altro strisciando.

Sagr. Aggiungasi, in confermazion di questo, il vedersi talvolta romper la corda non pel tirarla per lo lungo, ma solo per lo soverchiamente attorcerla; argomento, pare a me, concludente, le fila esser talmente tra di loro scambievolmente compresse, che le comprimenti non permettono alle compresse scorrer quel minimo che sarebbe necessario per allungar le spire, acciocchè potessero circondar la fune, che nel torcimento si scorcia, ed in conseguenza qualche poco s' ingrossa.

Salv. Voi benissimo dite: ma considerate appresso come una verità si tira dietro l' altra. Quel filo, che stretto tra le dita non segue chi con qualche forza tirandolo vorrebbe di tra esse sottrarlo, resiste perchè da doppia compressione vien ritenuto; imperciocchè non meno il dito superiore preme contro all' inferiore, che questo si prema contro a quello. E non è dubbio che quando di queste due premute se ne potesse ritenere una sola, resterebbe la metà di quella resistenza che dalle due congiunte dipendeva: ma perchè non si può coll' alzar, v. g., il dito superiore levar la sua pressione senza rimuovere anco l'altra parte, conviene con nuovo artifizio conservarne una di loro, e trovar modo che l'istesso filo comprima sè medesimo contro al dito, o altro corpo solido, sopra il quale si posa, e far sì che l' istessa forza, che lo tira per separarnelo, tanto più ve lo comprima quanto più gagliardamente lo tira: e questo si conseguirà coll'avvolgere a guisa di spira il filo medesimo intorno al solido. Il che acciò meglio s' intenda, ne segnerò un poco di figura; e questi AB, CD (*Fig.* 2) siano duė cilindri, e tra essi disteso il filo EF, che per maggior chiarezza ce lo figureremo essere una cordicella: non è dubbio che, premendo gagliardamente i due cilindri l' uno contro all' altro, la corda FE, tirata dall' estremità F, resisterà a non piccola violenza prima che scorrere tra i due solidi comprimentila: ma se rimuoveremo l'uno di loro, la corda, benchè continui di toccar l'altro, non però da tal toccamento sarà ritenuta che liberamente non iscorra. Ma se ritenendola, benchè debolmente, attaccata verso la sommità del cilindro A, l' avvolgeremo intorno a quello a

foggia di spira AFLOTR, e dal capo R la tireremo, è manifesto che ella comincerà a stringere il cilindro, e se le spire e voltate saranno molte, sempre più nel validamente tirare si comprimerà la corda addosso al cilindro: e facendosi colla moltiplicazione delle spire più lungo il toccamento, ed in conseguenza meno superabile, difficile si farà sempre più lo scorrer della corda e l'acconsentir alla traente forza. Or chi non vede che tale è la resistenza delle filamenta, che con mille e mille simili avvolgimenti il grosso canapo contessono? Anzi lo strignimento di simili tortuosità collega tanto tenacemente, che di non molti giunchi, nè anco molto lunghi, sì che poche sono le spire con le quali tra di loro s'intrecciano, si compongono robustissime funi, che mi par che domandino fuste.

Sagr. Cessa per lo vostro discorso nella mia mente la maraviglia di due effetti, dei quali le ragioni non bene erano comprese da me. Uno era il vedere come due o al più tre rivolte del canapo intorno al fuso dell'argano potevano non solamente ritenerlo, che, tirato dall'immensa forza del peso ch'ei sostiene, scorrendo non gli cedesse, ma che di più, girando l'argano, il medesimo fuso, col solo toccamento del canapo che lo stringe, potesse colli succedenti ravvolgimenti tirare e sollevare vastissime pietre, mentre che le braccia di un debile ragazzo vanno ritenendo e radunando l'altro capo del medesimo canapo. L'altro è di un semplice ma arguto ordigno, trovato da un giovane mio parente, per poter con una corda calarsi da una finestra senza scorticarsi crudelmente le palme delle mani, come poco tempo avanti gli era intervenuto con sua grandissima offesa. Ne farò per facile intelligenza un piccolo schizzo. Intorno a un simil cilindro di legno AB (*Fig.* 3), grosso come una canna e lungo circa un palmo, incavò un canaletto in forma di spira di una voltata e mezzo e non più, e di larghezza capace della corda che voleva adoprare; e questa fece entrare per lo canale dal termine A, e uscire per l'altro B, circondando poi tal cilindro e corda con un cannone pur di legno, ovvero anco di latta, ma diviso per lungo ed

ingangherato, sí che liberamente potesse aprirsi e chiudersi: e abbracciando poi e stringendo con ambe le mani esso cannone, raccomandata la corda a un fermo ritegno di sopra, si sospese sulle braccia, e riuscì tale la compressione della corda tra il cannone ambiente e il cilindro, che ad arbitrio suo stringendo fortemente le mani poteva sostenersi senza calare, ed allentandole un poco si calava lentamente a suo piacimento.

Salv. Ingegnosa veramente invenzione, cui, per intera esplicazione della sua natura, mi par di scorgere così per ombra che qualche altra speculazione si potesse aggiugnere: ma non voglio per ora digredir più sopra di questo particolare; e massime volendo voi sentir il mio pensiero intorno alla resistenza allo strapparsi degli altri corpi, la cui testura non è di filamenti, come quella delle funi e della maggior parte dei legni, ma la coerenza delle parti loro in altre cagioni par che consista, le quali per mio giudizio si riducono a due capi; l'uno dei quali è quella decantata repugnanza che ha la natura all'ammettere il vacuo: per l'altro bisogna (non bastando questo del vacuo) introdur qualche glutine, visco o colla, che tenacemente colleghi le particole, delle quali esso corpo è composto. Dirò prima del vacuo, mostrando con chiare esperienze quale e quanta sia la sua virtù. E prima, il vedersi, quando ne piaccia, due piastre di marmo, di metallo o di vetro esquisitamente spianate, pulite e lustre, che posata l'una su l'altra, senza veruna fatica se gli muove sopra strisciando (sicuro argomento che nessun glutine le congiunge), ma che volendo separarle, mantenendole equidistanti, tal repugnanza si trova, che la superiore solleva e si tira dietro l'altra, e perpetuamente la ritiene sollevata, ancorchè assai grossa e grave, evidentemente ci mostra l'orrore della natura nel dover ammettere, sebben per breve momento di tempo, lo spazio vuoto che tra di quelle rimarrebbe avanti che il concorso delle parti dell'aria circostante l'avesse occupato e ripieno. Vedesi anco che quando bene tali due lastre non fussero esattamente pulite, e perciò che il lor contatto non fusse esquisito del tutto, nel volerle

separar lentamente, niuna renitenza si trova fuor di quella della sola gravità *della superiore;* ma in un alzamento repentino l' inferior pietra si solleva, ma subito ricade, seguendo solamente la sovrana per quel brevissimo tempo che basta per la distrazione di quella poca di aria che s' interponeva tra le lastre, che non ben combagiavano, e per l' ingresso dell'altra circonfusa. Tal resistenza, che così sensatamente si scorge tra le due lastre, non si può dubitare che parimente non risegga tra le parti di un solido, e che nel loro attaccamento non entri almanco a parte, e come causa concomitante.

Sagr. Fermate di grazia e concedetemi che io dica una particolar considerazione che pure ora mi è caduta in mente: e questa è, che il vedere come la piastra inferiore segue la superiore e che con moto velocissimo vien sollevata, ci rende sicuri che, contro al detto di molti filosofi e forse di Aristotile medesimo, il moto nel vacuo non sarebbe instantaneo; perchè quando fusse tale, le nominate due lastre senza repugnanza veruna si separerebbero, giacchè il medesimo instante di tempo basterebbe per la loro separazione e per lo concorso dell'aria ambiente a riempir quel vacuo, che tra esse potesse restare. Dal seguir dunque che fa l'inferior lastra la superiore, si raccoglie come nel vacuo il moto non sarebbe instantaneo; e si raccoglie insieme, che pur tra le medesime piastre resti qualche vacuo, almeno per brevissimo tempo, cioè per tutto quello che passa nel movimento dell'ambiente, mentre concorre a riempire il vacuo; che se vacuo non vi restasse, nè di concorso, nè di moto di ambiente vi sarebbe bisogno. Converrà dunque dire, che pur per violenza o contro a natura il vacuo talor si conceda (benchè l' opinion mia è che nessuna cosa sia contro a natura, salvo che l'impossibile, il quale poi non è mai). Ma qui mi nasce un'altra difficoltà, ed è che sebben l' esperienza mi assicura della verità della conclusione, l'intelletto non resta già interamente appagato della causa, alla quale cotale effetto viene attribuito. Imperocchè l'effetto della separazione delle due lastre è anteriore al vacuo, che in conseguenza alla separazione succederebbe; e perchè mi pare che

la causa debba, se non di tempo, almeno di natura precedere all'effetto, e che di un effetto positivo positiva altresì debba esser la causa, non resto capace come dell'aderenza delle due piastre, e della repugnanza all'esser separate, effetti che già sono in atto, sì possa riferir la cagione al vacuo, che non è, ma che avrebbe a seguire. E delle cose che non sono, nessuna può esser l'operazione, conforme al pronunziato certissimo del Filosofo.

Simp. Ma giacchè concedete questo assioma ad Aristotile, non credo che siate per negargliene un altro bellissimo e vero, e questo è che la natura non intraprende a voler fare quello che repugna ad esser fatto; dal qual pronunziato mi par che dipenda la soluzione del nostro dubbio; perchè dunque a sè medesimo repugna esser uno spazio vacuo, vieta la natura il far quello, in conseguenza di che necessariamente succederebbe il vacuo; e tale è la separazione delle sue lastre.

Sagr. Ora ammesso per soluzione adeguata del mio dubbio questo che produce il Sig. Simplicio, seguitando il cominciato discorso, parmi che questa medesima repugnanza al vacuo dovrebbe esser bastante ritegno delle parti di un solido di pietra o di metallo, o se altre ve ne sono, che più saldamente stiano congiunte e renitenti alla divisione. Perchè, se di uno effetto una sola è la cagione, siccome io ho inteso e creduto, o se pur molte se ne assegnano, ad una sola si riducono, perchè questa del vacuo, che sicuramente è, non basterà per tutte le resistenze?

Salv. Io per ora non voglio entrare in questa contesa, se il vacuo senza altro ritegno sia per sè solo bastante a tenere unite le parti disunibili dei corpi consistenti; ma vi dico bene che la ragione del vacuo, che milita e conclude nelle due piastre, non basta per sè sola al saldo collegamento delle parti di un solido cilindro di marmo o di metallo, le quali violentate da forze gagliarde, che dirittamente le tirino, finalmente si separano e si dividono. E quando io trovi modo di distinguer questa già conosciuta resistenza, dipendente dal vacuo, da ogni altra, qualunque ella si fusse, che con lei concorresse in fortificar l'attaccamento, e che io vi faccia vedere

come essa sola non sia a gran pezzo bastante per tale effetto, non concederete voi che sia necessario introdurne altra? Aiutatelo, Sig. Simplicio, giacchè egli sta ambiguo sopra quello che debba rispondere.

Simp. È forza che la sospensione del Sig. Sagredo sia per altro rispetto, non restando luogo di dubitare sopra sì chiara e necessaria conseguenza.

Sagr. Voi, Sig. Simplicio, l'avete indovinata. Andava pensando se, non bastando un milion di oro l'anno, che vien di Spagna, per pagar l'esercito, fusse necessario fare altra provvisione che di danari per le paghe de' soldati. Ma seguitate pur, Sig. Salviati, e supponendo che io ammetta la vostra conseguenza, mostrateci il modo di separare l'operazione del vacuo dall' altre, e misurandola fateci vedere come ella sia scarsa per l' effetto di che si parla.

Salv. Il vostro demonio vi assiste. Dirò il modo dell'appartar la virtù del vacuo dall'altre, e poi la maniera del misurarla. E per appartarla piglieremo una materia continua, le cui parti manchino di ogni altra resistenza alla separazione fuor che di quella del vacuo, quale a lungo è stato dimostrato in certo trattato del nostro Accademico esser l'acqua. Talchè qualunque volta si disponesse un cilindro di acqua, e che attratto si sentisse resistenza allo staccamento delle sue parti, questo da altra cagione, che dalla repugnanza al vacuo, non potrebbe riconoscersi. Per far poi una tale esperienza mi sono immaginato un artifizio, il quale coll' ajuto di un poco di disegno, meglio che con semplici parole, potrò dichiarare. Figuro questo CABD (*Fig.* 4) essere il profilo di un cilindro di metallo o di vetro, che sarebbe meglio vuoto dentro, ma giustissimamente tornito, nel cui concavo entri con esquisitissimo contatto un cilindro di legno, il cui profilo noto EGHF, il qual cilindro si possa spignere in su e in giù, e questo voglio che sia bucato nel mezzo, sì che vi passi un filo di ferro oncinato nell'estremità K, e l' altro capo I vada ingrossandosi in forma di cono o turbine, facendo che il foro fatto nel legno sia nella parte di sopra esso ancora incavato in forma di conica superficie aggiustata puntualmente per ri-

cevere la conica estremità I del ferro IK, qualunque volta si tiri in giù dalla parte K. Inserto il legno, o vogliamolo chiamar zaffo, EH nel cavo cilindro AD, non voglio che arrivi sino alla superior superficie di esso cilindro, ma che ne resti lontano due o tre dita; e tale spazio dee esser ripieno di acqua, la quale vi si metterà tenendo il vaso colla bocca CD all' insù, e calandovi sopra lo zaffo EH, col tenere il turbine I remoto alquanto dal cavo del legno, per lasciar l'esito all'aria, che nel calcare lo zaffo se ne uscirà per lo foro del legno, che perciò si fa alquanto più largo della grossezza dell' asticciuola di ferro IK. Dato l' esito all' aria, e ritirato il ferro che ben suggelli su il legno col suo turbine, si rivolterà il vaso tutto colla bocca all' ingiù, ed attaccando all'oncino K un recipiente da mettervi dentro rena, o altra materia grave, si caricherà tanto, che finalmente la superior superficie EF dello zaffo si staccherà dall' inferiore dell'acqua, alla quale niente altro la teneva congiunta che la repugnanza del vacuo *e di quel tal toccamento dello zaffo con la superficie del cilindro; la qual resistenza di toccamento puossi misurar prima separata con osservar quanto peso si ricerchi a muover lo zaffo per lo cannone quando il foro è aperto; e* pesandò poi lo zaffo col ferro, col recipiente, e con ciò che vi sarà dentro, *e detraendo quel peso (misura della resistenza dell' interno toccamento) dal rimanente peso,* averemo la quantità della forza del vacuo; e se attaccato a un cilindro di marmo o di cristallo grosso quanto il cilindro dell' acqua, però tale che insieme col peso proprio dell' istesso marmo o cristallo pareggi la gravità di tutte le nominate bagaglie, ne seguirà la rottura, potremo senza verun dubbio affermare, la sola ragion del vacuo tener le parti del marmo e cristallo congiunte: ma non bastando, e che per romperlo bisogni aggiugnervi quattro volte altrettanto peso, converrà dire, la resistenza del vacuo esser delle cinque parti una, e l' altra quadrupla di quella del vacuo.

SIMP. Non si può negare che l'invenzione non sia ingegnosa, ma l' ho per soggetta a molte difficoltà che me la rendono dubbia; perchè, chi ci assicura che l'aria non possa

penetrar tra il vetro e lo zaffo, ancorchè si circondi bene di stoppa o altra materia cedente? e così, acciocchè il cono I saldi bene il foro, forse non basterebbe l'ungerlo con cera o trementina. Inoltre, perchè non potrebbero le parti dell'acqua distrarsi e rarefarsi? perchè non penetrare aria, o esalazioni, o altre sustanze più sottili per le porosità del legno, o anche dell'istesso vetro?

Salv. Molto destramente ci muove il Sig. Simplicio le difficoltà, ed in parte ci somministra i rimedj, quanto alla penetrazion dell'aria per lo legno, o tra il legno e il vetro. Ma io, oltre di ciò, noto che potremo nell'istesso tempo accorgerci, con acquisto di nuove cognizioni, se le promosse difficoltà avranno luogo. Imperocchè se l'acqua sarà per natura, sebben con violenza, distraibile, come accade nell'aria, si vedrà lo zaffo calare, *avanti la separazione dello zaffo dall'acqua, per la propria gravità e per quella che se gli va aggiungendo nel recipiente:* e se faremo nella parte superiore del vetro un poco di ombelico prominente, come questo V, penetrando per la sustanza o porosità del vetro o del legno aria, o altra più tenue e spiritosa materia, si vedrà radunare (cedendogli l'acqua) nell'eminenza V; le quali cose quando non si scorgano, verremo assicurati l'esperienza esser colle debite cautele stata tentata, e conosceremo l'acqua non esser distraibile, nè il vetro esser permeabile da veruna materia, benchè sottilissima, *fuori che dal fuoco.*

Sagr. Ed io mercè di questi discorsi ritrovo la causa di un effetto, che lungo tempo mi ha tenuto la mente ingombrata di maraviglia e vuota d'intelligenza. Osservai già una citerna, nella quale, per trarne l'acqua, fu fatto fare una tromba da chi forse credeva, ma vanamente, di poterne cavare con minor fatica l'istessa o maggior quantità che colle secchie ordinarie; ed ha questa tromba il suo stantuffo o animella su alta, sì che l'acqua si fa salire per attrazione, e non per impulso, come fanno le trombe che hanno l'ordigno da basso. Questa, sin che nella citerna vi è acqua sino ad una determinata altezza, la tira abbondantemente, ma quando l'acqua abbassa oltre a un determinato segno, la

tromba non lavora più. Io credetti, la prima volta che osservai tale accidente, che l'ordigno fusse guasto, e trovato il maestro acciò lo raccomodasse, mi disse che non vi era altrimente difetto alcuno, fuor che nell'acqua, la quale essendosi abbassata troppo, non pativa di essere alzata a tanta altezza; e mi soggiunse, nè con trombe, nè con altra macchina che sollevi l'acqua per attrazione, esser possibile fa[illegible] montare un capello più di *circa* diciotto braccia, e sieno pu[illegible]e trombe larghe o strette, *che* questa è la misura dell'altezza limitatissima. Ed io sin ora sono stato così poco accorto, che intendendo che una corda, una mazza di legno, e una verga di ferro si può tanto e tanto allungare che finalmente il suo proprio peso la strappi tenendola attaccata in alto, non mi è sovvenuto che l'istesso molto più agevolmente accaderà di una corda o verga di acqua. E che altro è quello che si attrae nella tromba che un cilindro di acqua, il quale avendo la sua attaccatura di sopra, allungato più e più, finalmente arriva a quel termine, oltre al quale tirato dal suo già fatto soverchio peso, non altrimente che se fusse una corda, si strappa? *E l'istesso seguirebbe per mio credere negli altri liquidi, come nell'argento vivo, nel vino, nell'olio ec., ne' quali si farebbe lo strappamento in minor o maggior altezza delle diciotto braccia, secondo la maggior o minor gravità in specie di essi liquidi rispetto a quella dell'acqua, reciprocamente; misurando però tali altezze sempre perpendicolarmente.*

Salv. Così puntualmente cammina il negozio, e perchè la medesima altezza delle diciotto braccia *circa* è il prefisso termine dell'altezza, alla quale qualsivoglia quantità di acqua, sieno cioè le trombe larghissime o strette o strettissime quanto un fil di paglia, può sostentarsi, tuttavolta che noi peseremo l'acqua contenuta in diciotto braccia di cannone, sia largo o stretto, avremo il valore della resistenza del vacuo nei cilindri di qualsivoglia materia solida, grossi quanto sono i concavi dei cannoni proposti. E giacchè abbiamo detto tanto, mostriamo come di tutti i metalli, pietre, legni, vetri ec. si può facilmente ritrovare sino a quanta lunghezza si potrebbono allungare cilindri, fili o verghe di qualsivoglia grossez-

za, oltre alla quale, gravati dal proprio peso, più non potrebber reggersi, ma si strapperebbero. Piglisi, per esempio, un fil di rame di qualsivoglia grossezza e lunghezza, e fermato un de' suoi capi ad alto, si vada aggiugnendo all' altro maggior e maggior peso sì che finalmente si strappi, e sia il peso massimo che potesse sostenere, v. g., cinquanta libbre. È manifesto che cinquanta libbre di rame oltre al proprio peso, che sia, per esempio, un ottavo di oncia tirato in filo di tal grossezza, sarebbe la lunghezza massima del filo che sè stesso potesse reggere. Misurisi poi quanto era lungo il filo che si strappò, e sia, v. g., un braccio: e perchè pesò un ottavo di oncia e resse sè stesso e cinquanta libbre appresso, che sono ottavi di oncia quattromila ottocento, diremo tutti i fili di rame, qualunque si sia la lor grossezza, potersi reggere sino alla lunghezza di quattromila ottocento un braccio, e non più; e così una verga di rame potendo reggersi sino alla lunghezza di quattromila ottocento un braccio, la resistenza che ella trova dipendente dal vacuo, rispetto al restante, è tanta, quanto importa il peso di una verga di acqua lunga braccia diciotto e grossa quanto quella stessa di rame; e trovandosi, v. g., il rame esser nove volte più grave dell' acqua, di qualunque verga di rame la resistenza allo strapparsi, dipendente dalla ragion del vacuo, importa quanto è il peso di due braccia dell' istessa verga: e con simil discorso ed operazione si potranno trovare le lunghezze delle fila o verghe di tutte le materie solide ridotte alla massima che sostener si possa, ed insieme qual parte abbia il vacuo nella lor resistenza.

Sagr. Resta ora che ci dichiate in qual cosa consista il resto della renitenza, cioè qual sia il glutine o visco che ritiene attaccate le parti del solido, oltre a quello che deriva dal vacuo; perchè io non saprei immaginarmi qual colla sia quella che non possa essere arsa e consumata in un' ardentissima fornace in due, tre e quattro mesi, nè in dieci o cento; dove stando tanto tempo argento, oro e vetro liquefatti, cavati poi tornano le parti loro nel freddarsi a riunirsi e riattaccarsi come prima. Oltrechè la medesima difficoltà, che ho nell' attaccamento delle parti del vetro, l' avrò io nelle parti

della colla, cioè che cosa sia quella che le tiene così saldamente congiunte.

Salv. Pur poco fa vi dissi che il vostro demonio vi assisteva: sono io ancora nelle medesime angustie, ed ancòra io toccandò con mano come la repugnanza del vacuo è indubitabilmente quella che non permette, se non con gran violenza, la separazione delle due lastre, e più delle due gran parti della colonna di marmo o di bronzo, non so vedere come non abbia ad aver luogo, ed esser parimente cagione della coerenza delle parti minori, e sino delle minime ultime delle medesime materie; ed essendo che di un effetto una sola è la vera e potissima causa, mentre io non trovo altro glutine, perchè non debbo tentar di vedere se questo del vacuo, che si trova, può bastarci?

Simp. Se di già voi avete dimostrato la resistenza del gran vacuo, nel separarsi le due gran parti di un solido, esser piccolissima in comparazion di quella che tien congiunte le particole minime, come non volete tener più che per certo questa esser diversissima da quella?

Salv. A questo rispose il Sig. Sagredo che pur si pagavano tutti i particolari soldati con danari raccolti da imposizioni generali di soldi e di quattrini, sebbene un milion di oro non bastava a pagar tutto l'esercito. E chi sa che altri minutissimi vacui non lavorino per le minutissime particole, sì che per tutto sia dell'istessa moneta quello con che si tengono tutte le parti congiunte? Io vi dirò quello che talora mi è passato per l'immaginazione: ve lo do, non come verità risoluta, ma come una qual si sia fantasia piena anco d'indigestioni, sottoponendola a più alte contemplazioni. Cavatene se nulla vi è che vi gusti; il resto giudicatelo come più vi pare. Nel considerar talvolta come andando il fuoco serpendo tra le minime particole di questo e di quel metallo, che tanto saldamente si trovano congiunte, finalmente le separa e disunisce; e come poi partendosi il fuoco tornano colla medesima tenacità di prima a ricongiungersi senza diminuirsi punto la quantità nell'oro e pochissimo in altri metalli, anco per lungo tempo che restino fusi, pensai che ciò potesse acca-

dere perchè le sottilissime particole del fuoco penetrando per gli angusti pori del metallo (tra i quali per la loro strettezza non potessero passare i minimi dell' aria, nè di molti altri fluidi), col riempire i minimi vacui tra esse frapposti, liberassero le minime particole di quello dalla violenza, colla quale i medesimi vacui l' una contro l' altra attraggono, e proibiscon loro la separazione; e così potendosi liberamente muovere, la lor massa ne divenisse fluida, e tale restasse sin che gl' ignicoli tra esse dimorassero: partendosi poi quelli e lasciando i pristini vacui, tornasse la lor solita attrazione, ed in conseguenza l' attaccamento delle parti. Ed all' instanza del Sig. Simplicio parmi che si possa rispondere, che se bene tali vacui sarebber piccolissimi, ed in conseguenza ciascheduno facile ad esser superato, tuttavia l' innumerabile moltitudine innumerabilmente (per così dire) multiplica le resistenze: e quale e quanta sia la forza che da numero immenso di debolissimi momenti insieme congiunti risulta, porgacene evidentissimo argomento il veder noi un peso di milioni di libbre sostenuto da canapi grossissimi, cedere, e finalmente lasciarsi vincere e sollevare dall' assalto degl' innumerabili atomi di acqua, li quali, o spinti dall' austro o pure che distesi in tenuissima nebbia si vadano movendo per l' aria, vanno a cacciarsi tra fibra e fibra dei canapi tiratissimi, nè può l' immensa forza del pendente peso vietargli l' entrata; sì che penetrando per gli angusti meati, ingrossano le corde, e per conseguenza le scorciano, onde la mole gravissima a forza vien sollevata.

Sagr. Ei non è dubbio alcuno che mentre una resistenza non sia infinita, può dalla moltitudine di minutissime forze esser superata, sì che anco un numero di formiche strascicherebbe per terra una nave carica di grano; perchè il senso mostrandoci quotidianamente che una formica destramente porta un granello, e chiara cosa essendo che nella nave non sono infiniti granelli, ma compresi dentro a qualche numero, del quale se ne può prendere un altro quattro e sei volte maggiore, se a questo se ne prenderà un altro di formiche eguale, e si porranno in opera, condurranno per terra il grano e la nave

ancora. È ben vero che bisognerà che il numero sia grande, come anco, per mio parere, quello dei vacui che tengono attaccati i minimi del metallo.

Salv. Ma quando bisognasse che fussero anche infiniti, l'avete voi forse per impossibile?

Sagr. No, quando quel metallo fusse una mole infinita: altrimenti. . . .

Salv. Altrimenti che? Orsù, già che si è messo mano ai paradossi, vediamo se in qualche maniera si potesse dimostrare, come in una continua estensione finita non repugni il potersi ritrovare infiniti vacui; e nell'istesso tempo ci verrà, se non altro, almeno arrecata una soluzione del più ammirabile problema che sia da Aristotile messo tra quelli che esso medesimo addimanda ammirandi, dico tra le questioni meccaniche; e la soluzione potrebbe esser per avventura non meno esplicante e concludente di quella che egli medesimo ne arreca, e diversa anco da quello che molto acutamente vi considera il dottissimo Monsignore di Guevara. Ma bisogna prima dichiarare una proposizione non toccata da altri, dalla quale dipende lo scioglimento della quistione, che poi, s'io non m'inganno, si tira dietro altre notizie nuove e ammirande. Per intelligenza di che accuratamente descriveremo la figura. Però intendiamo un poligono equilatero ed equiangolo, di quanti lati esser si voglia, descritto intorno a questo centro G (*Fig.* 5), e sia per ora un esagono di ABCDEF, simile al quale, e ad esso concentrico, ne descriveremo un altro minore, quale noteremo HIKLMN, e del maggiore si prolunghi un lato AB indeterminatamente verso S, e del minore il rispondente lato HI sia verso la medesima parte similmente prodotto, segnando la linea HT parallela all'AS, e pel centro passi l'altra alle medesime equidistante GV. Fatto questo, il maggior poligono rivolgasi sopra la linea AS, portando seco l'altro poligono minore. È chiaro che stando fisso il punto B, termine del lato AB, mentre si comincia la revoluzione, l'angolo A si solleverà, e il punto C s'abbasserà descrivendo l'arco CQ, sì che il lato BC si adatti alla linea a sè stesso eguale BQ: ma in tal conversione

l' angolo I del minor poligono si eleverà sopra la linea IT, per esser la IB obbliqua sopra l' AS; nè prima tornerà il punto I sulla parallela IT, se non quando il punto C sarà pervenuto in Q: allora l' I sarà caduto in O, dopo aver descritto l' arco IO fuori della linea HT, ed allora il lato IK sarà passato in OP. Ma il centro G tra tanto sempre averà camminato fuori della linea GV, sulla quale non sarà tornato se non dopo aver descritto l'arco GC. Fatto questo primo passo, il poligono maggiore sarà trasferito a posare col lato BC su la linea BQ, il lato IK del minore sopra la linea OP, avendo saltato tutta la parte IO senza toccarla, e il centro G pervenuto in C, facendo tutto il suo corso fuori della parallela GV. E finalmente tutta la figura si sarà rimessa in un posto simile al primo; sì che continuandosi la revoluzione, e venendo al secondo passo, il lato del maggior poligono DC si adatterà alla parte QX, il KL del minore (avendo prima saltato l' arco PY) caderà in YZ, ed il centro, procedendo sempre fuori della GV, in essa caderà solamente in R, dopo il gran salto CR. Ed in ultimo, finita una intera conversione, il maggior poligono avrà calcate sopra la sua AS sei linee eguali al suo perimetro senza veruna interposizione; il poligono minore avrà parimente impresse sei linee eguali all' ambito suo, ma discontinuate dall' interposizione di cinque archi, sotto i quali restano le corde, parti della parallela HT non tocche dal poligono; e finalmente il centro G non è convenuto mai con la parallela GV, salvo che in sei punti. Di qui potete comprendere come lo spazio passato dal minor poligono è quasi eguale al passato dal maggiore, cioè la linea HT alla AS, della quale è solamente minore quanto è la corda d' uno di questi archi, intendendo però la linea HT insieme con gli spazi dei cinque archi. Ora questo, che vi ho esposto e dichiarato nell' esempio di questi esagoni, vorrei che intendeste accadere di tutti gli altri poligoni, di quanti lati esser si vogliano, purchè siano simili, concentrici e congiunti, e che alla conversion del maggiore s' intenda rigirarsi anco l' altro quanto si voglia minore; che intendeste, dico, le linee da essi passate esser

prossimamente eguali, computando nello spazio passato dal minore gl' intervalli sotto gli archetti non tocchi da parte veruna del perimetro di esso minor poligono. Passa dunque il gran poligono di mille lati, e misura conseguentemente una linea retta eguale al suo ambito: e nell' istesso tempo il piccolo passa una prossimamente egual linea, ma interrottamente composta di mille particelle eguali ai suoi mille lati con l' interposizione di mille spazi vacui, che tali possiamo chiamarli in relazione alle mille lineette toccate dai lati del poligono. Ed il detto sin qui non ha veruna difficoltà o dubitazione. Ma ditemi, se intorno a un centro, qual sia, v. g., questo punto A, noi descriveremo due cerchi concentrici ed insieme uniti, e che dai punti C, B dei lor semidiametri siano tirate le tangenti CE, BF, e ad esse pel centro A la parallela AD, intendendo girato il cerchio maggiore sopra la linea BF (posta eguale alla di lui circonferenza, come parimente le altre due CE, AD), compita che abbia una revoluzione, che averà fatto il minor cerchio, e che il centro? questo sicuramente averà scorsa e toccata tutta la linea AD, e la circonferenza di quello averà con li suoi toccamenti misurata tutta la CE, facendo l' istesso che fecero i poligoni di sopra; in questo solamente differenti, che la linea HT non fu tocca in tutte le sue parti dal perimetro del minor poligono, ma ne furon lasciate tante intatte, con l' interposizione di vacui saltati, quante furon le parti tocche dai lati; ma qui nei cerchi mai non si separa la circonferenza del minor cerchio dalla linea CE, sì che alcuna sua parte non venga tocca, nè mai quello che tocca della circonferenza è manco del toccato nella retta. Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?

Sagr. Andava pensando se si potesse dire che sì come il centro del cerchio esso solo strascicato sopra l' AD la tocca tutta, essendo anco un punto solo, così potessero i punti della circonferenza minore, tirati dal moto della maggiore, andare strascicandosi per qualche particella della linea CE.

Salv. Questo non può essere per due ragioni; prima perchè non sarebbe maggior ragione che alcuno dei toccamenti si-

mili al C andassero strascicando per qualche parte della linea CE ed altri no; e quando questo fusse, essendo tali toccamenti (perchè son punti) infiniti, gli strascichi sopra la CE sarebbero infiniti, ed essendo quanti, farebbero una linea infinita, ma la CE è finita. L'altra ragione è, che mutando il cerchio grande nella sua conversione continuamente contatto, non può non mutarlo parimente il minor cerchio, non si potendo da altro punto che dal punto B tirare una linea retta sino al centro A, e che passasse pel punto C; sì che mutando contatto la circonferenza grande, lo muta ancora la piccola, nè punto alcuno della piccola tocca più d'un punto della sua retta CE. Oltre che anco nella conversione dei poligoni nessun punto del perimetro del minore si adattava a più d'un punto della linea che dal medesimo perimetro veniva misurata; come si può facilmente intendere considerando la linea IK esser parallela alla BC, onde sin che la BC non si sobiaccia sopra la BQ, la IK resta sollevata sopra la IP, nè prima la calca se non nel medesimo istante che la BC si unisce con la BQ, ed allora tutta insieme la IK si unisce con la OP, e poi immediatamente se gli eleva sopra.

Sagr. Il negozio è veramente molto intrigato, nè a me sovviene scioglimento alcuno; però diteci quello che a noi conviene.

Salv. Io ricorrerei alla considerazione dei poligoni sopra considerati, l'effetto de'quali è intelligibile, e di già compreso, e direi, che sì come nei poligoni di centomila lati alla linea passata e misurata dal perimetro del maggiore, cioè, dai centomila suoi lati continuamente distesi, è eguale la misurata dai centomila lati del minore, ma con l'interposizione di centomila spazi vacui traposti; così direi, nei cerchi (che son poligoni di lati infiniti) la linea passata dagli infiniti lati del cerchio grande, continuamente disposti, esser pareggiata in lunghezza della linea passata dagl'infiniti lati del minore, ma da questi con l'interposizione d'altrettanti vacui tra essi; e sì come i lati non son quanti, ma bene infiniti, così gl'interposti vacui non son quanti, ma infiniti, quelli cioè infiniti punti tutti pieni, e questi infiniti punti

parte pieni e parte vacui. E qui voglio che notiate come risolvendo e dividendo una linea in parti quante, e per conseguenza numerate, non è possibile disporle in una estensione maggiore di quella che occupava mentre stavano continuate e congiunte, senza l'interposizione d'altrettanti spazi vacui; ma immaginandola risoluta in parti non quante, cioè ne' suoi infiniti indivisibili, la possiamo concepire distratta in immenso senza l'interposizione di spazi quanti vacui, ma sì bene d'infiniti indivisibili vacui. E questo, che si dice delle semplici linee, s'intenderà detto delle superficie de' corpi solidi, considerandoli composti d'infiniti atomi non quanti; che mentre li vorremo dividere in parti quante, non è dubbio che non potremo disporle in ispazi più ampli del primo occupato dal solido, se non con l'interposizione di spazi quanti vacui, vacui dico almeno della materia del solido; ma se intenderemo l'altissima ed ultima resoluzione fatta nei primi componenti non quanti ed infiniti, potremo concepire tali componimenti distratti in ispazio immenso senza l'interposizione di spazi quanti vacui, ma solamente di vacui infiniti non quanti; ed in questa guisa non repugna distrarsi, v. g., un piccolo globetto d'oro in uno spazio grandissimo senza ammettere spazi quanti vacui: tuttavolta però che ammettiamo l'oro esser composto d'infiniti indivisibili.

Simp. Parmi che voi camminiate alla via di quei vacui disseminati di certo filosofo antico.

Salv. Ma però voi non soggiugnete: Il quale negava la provvidenza divina, come in certo simil proposito, assai poco a proposito, soggiunse un tale antagonista del nostro Accademico.

Simp. Vidi bene, e non senza stomaco, il livore del male affetto contradditore: ma io non solamente per termine di buona creanza non toccherei simili tasti, ma perchè so quanto sono discordi dalla mente ben temperata e ben organizzata di V. S. non solo religiosa e pia, ma cattolica e santa. Ma ritornando sul proposito, molte difficoltà sento nascermi dalli avuti discorsi, dalle quali veramente io non saprei liberarmi. E per una mi si para avanti questa, che se le circon-

ferenze dei due cerchi sono eguali alle due rette CE, BF, questa continuamente presa, e quella coll'interposizione d'infiniti punti vacui, l'AD descritta dal centro, che è un punto solo, in qual maniera si potrà chiamare ad esso eguale contenendone infiniti? In oltre quel comporre la linea di punti, il divisibile d'indivisibili, il quanto di non quanti, mi paiono scogli assai duri da passarli; e l'istesso dover ammettere il vacuo, tanto concludentemente riprovato da Aristotile, non manca delle medesime difficoltà.

Salv. Ci sono veramente coteste, e dell'altre: ma ricordiamoci che siamo tra gl'infiniti e gl'indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, e questi per la lor piccolezza; contuttociò vediamo che l'umano discorso non vuole rimanersi dall'aggirarvisi attorno; dal che pigliando io ancora qualche libertà, produrrei alcuna mia fantasticheria, se non concludente necessariamente, almeno, per la novità, apportatrice di qualche meraviglia: ma forse il divertir tanto lungamente dal cominciato cammino potrebbe parervi importuno, e però poco grato.

Sagr. Di grazia godiamo del benefizio e privilegio, che s'ha dal parlar con i vivi e tra gli amici, e più di cose arbitrarie e non necessarie, differente dal trattar co' libri morti, li quali ti eccitano mille dubbj e nessuno te ne risolvono. Fateci dunque partecipi di quelle considerazioni che il corso dei nostri ragionamenti vi suggerisce, che non ci mancherà tempo, mercè dell'esser noi disobbligati da funzioni necessarie, di continuare, e risolvere l'altre materie intraprese; ed in particolare i dubbj toccati dal Sig. Simplicio non si trapassino in tutti modi.

Salv. Così si faccia, poichè tale è il vostro gusto; e cominciando dal primo, che fu, come si possa mai capire che un sol punto sia eguale ad una linea, vedendo di non ci poter fare altro per ora, proverò di quietare o almeno temperare una improbabilità con un'altra simile o maggiore, come talvolta una maraviglia si attutisce con un miracolo. E questo sarà col mostrarvi due superficie eguali, ed insieme due corpi pur eguali, e sopra le medesime dette superficie come

basi loro collocati, andarsi continuamente ed egualmente e queste e quelli nel medesimo tempo diminuendo, restando sempre tra di loro eguali i loro residui, e finalmente andare, sì le superficie come i solidi, a terminare le lor perpetue egualità precedenti, l'uno dei solidi coll'una delle superficie in una lunghissima linea, e l'altro solido con l'altra superficie in un sol punto; cioè questi in un sol punto, e quelli in infiniti.

Sagr. Ammirabile proposta veramente mi par cotesta, però sentiamone l'esplicazione e la dimostrazione.

Salv. È necessario farne la figura, perchè la prova è pura geometrica. Pertanto intendasi il mezzo cerchio AFB (*Fig.* 6), il cui centro C, ed intorno ad esso il parallelogrammo rettangolo ADEB, e dal centro ai punti D, E sieno tirate le rette linee CD, CE. Figurandoci poi il semidiametro CF perpendicolare a una delle due AB, DE immobile, intendiamo intorno a quello girarsi tutta questa figura. È manifesto che dal rettangolo ADEB verrà descritto un cilindro, dal semicircolo AFB una mezza sfera, e dal triangolo CDE un cono. Inteso questo, voglio che c'immaginiamo esser levato via l'emisferio, lasciando però il cono e quello che rimarrà del cilindro, il quale, dalla figura che riterrà simile a una scodella, chiameremo pure scodella; della quale e del cono prima dimostreremo che sono eguali; e poi un piano tirato parallelo al cerchio che è base della scodella, il cui diametro è la linea DE e il centro F, dimostreremo tal piano, che passasse, v. g., per la linea GN, segando la scodella nei punti GI, ON, ed il cono ne' punti HL, tagliare la parte del cono CHL eguale sempre alla parte della scodella, il cui profilo ci rappresentano i triangoli GAI, BON; e di più si proverà, la base ancora del medesimo cono, cioè il cerchio, il cui diametro HL, essere eguale a quella circolar superficie, che è base della parte della scodella, che è come se dicessimo un nastro di larghezza quanta è la linea GI (notate intanto che cosa sono le diffinizioni dei matematici, che sono una imposizion di nomi, o vogliam dire abbreviazioni di parlare, ordinate ed introdotte per levar lo stento tedioso, che

voi ed io sentiamo di presente per non aver convenuto insieme di chiamar, v. g., questa superficie nastro circolare, e quel solido acutissimo della scodella rasoio rotondo). Or comunque vi piaccia chiamarli, bastivi intendere che il piano prodotto per qualsivoglia distanza, pur che sia parallelo alla base, cioè al cerchio, il cui diametro DE, taglia sempre i due solidi, cioè la parte del cono CHL e la superior parte della scodella eguali tra di loro: e parimente le due superficie basi di tali solidi, cioè il detto nastro e il cerchio HL pur tra loro eguali. Dal che ne segue la maraviglia accennata: cioè, che se intenderemo il segante piano successivamente innalzato verso la linea AB, sempre le parti dei solidi tagliate sono eguali, come anco le superficie, che son basi loro, pure sempre sono eguali, e finalmente alzando e alzando tanto li due solidi (sempre eguali) quanto le lor basi (superficie pur sempre eguali), vanno a terminare l'una coppia di loro in una circonferenza di un cerchio, e l'altra in un sol punto: che tali sono l'orlo supremo della scodella e la cuspide del cono. Or mentre che nella diminuzione dei due solidi si và sino all'ultimo mantenendo sempre tra essi la egualità, ben par conveniente il dire che gli altissimi ed ultimi termini di tali menomamenti restino tra di loro eguali, e non l'uno infinitamente maggior dell'altro; par dunque che la circonferenza di un cerchio immenso possa chiamarsi eguale a un sol punto. E questo, che accade nei solidi, accade parimente nelle superficie basi loro, che esse ancora, conservando nella comune diminuzione sempre la egualità, vanno infine ad incontrare, nel momento della loro ultima diminuzione, quella per suo termine la circonferenza di un cerchio, e questa un sol punto. Li quali perchè non si debbon chiamare eguali, se sono le ultime reliquie e vestigie lasciate da grandezze eguali? E notate appresso, che quando ben fussero tali vasi capaci degl'immensi emisferi celesti, tanto gli orli loro supremi, e le punte dei contenuti coni, servando sempre tra loro l'egualità, andrebbero a terminare, quelli in circonferenze eguali a quelle de' cerchi massimi degli orbi celesti, e questi in semplici punti. Onde conforme a quello

che tali speculazioni ne persuadono, anco tutte le circonferenze di cerchi, quanto si voglia diseguali, posson chiamarsi tra loro eguali, e ciascheduna eguale a un punto solo.

Sagr. La speculazione mi par tanto gentile e peregrina, che io, quando ben potessi, non me gli vorrei opporre, chè mi parrebbe un mezzo sacrilegio lacerar sì bella struttura calpestandola con qualche pedantesco affronto; però per intera soddisfazione recateci pur la prova, che dite geometrica, del mantenersi sempre l'egualità tra quei solidi e quelle basi loro, che penso che non possa esser se non molto arguta, essendo così sottile la filosofica meditazione che da tal conclusione dipende.

Salv. La dimostrazione è anco breve e facile. Ripigliamo la segnata figura, nella quale per esser l'angolo IPC retto, il quadrato del semidiametro IC è eguale alli due quadrati dei lati IP, PC. Ma il semidiametro IC è eguale alla AC, e questa alla GP, e la CP è eguale alla PH; adunque il quadrato della linea GP è eguale alli due quadrati delle IP, PH, e il quadruplo ai quadrupli; cioè il quadrato del diametro GN è eguale ai due quadrati IO, HL; e perchè i cerchi son tra loro come i quadrati de' lor diametri, il cerchio, il cui diametro GN, sarà eguale alli due cerchi, i cui diametri IO, HL, e tolto via il comune cerchio, il cui diametro IO, il residuo del cerchio GN sarà eguale al cerchio, il cui diametro è HL. E questo è quanto alla prima parte, *dell'egualità perpetua delle dette superficie.* Quanto poi all'altra parte, *dell'egualità de' suddetti solidi,* lasceremo per ora la dimostrazione, sì perchè, volendola noi vedere, la troveremo *in Archimede nella propos.* 32 *del Lib. I de Sphaera et Cylindro, e più universalmente nella* 29 *de Conoid. et Sphaeroid.*, *ed altrimenti ancora* nella duodecima proposizione del libro secondo *de centro gravitatis solidorum* posta dal signor Luca Valerio, nuovo Archimede dell'età nostra, il quale per un altro suo proposito se ne servì; sì perchè nel caso nostro basta l'aver veduto, come le superficie già dichiarate sieno sempre eguali, e come diminuendosi sempre egualmente vadano a terminare l'una in un sol punto, e l'altra nella circonferenza di un cerchio maggiore anco di qualsivoglia grandissimo, perchè

in questa conseguenza sola versa la nostra materia; *se ben in sustanza anche la seconda parte riman provata dalla prima, poichè se ciascuna delle superficie componenti la scodella è eguale a ciascuna delle superficie componenti il cono, chi non vede che, essendo questi solidi composti di quelle superficie, anche tutte quelle insieme prese sono eguali di necessità a tutte queste prese insieme, cioè il solido al solido?* (1).

Sagr. Ingegnosa la dimostrazione, quanto mirabile la riflessione fattavi sopra. Or sentiamo qualche cosa circa l'altra difficoltà promossa dal Sig. Simplicio, se però avete alcuna particolarità da dirvi sopra, che crederei che non potesse essere, essendo una controversia stata tanta esagitata.

Salv. Avrò qualche mio pensiero particolare, replicando prima quel che poco fa dissi, cioè che l'infinito è per sè solo da noi incomprensibile, come anco gl' indivisibili: or pensatè quello che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna farli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile. Le cose, che in più volte mi sono passate per la mente in tal proposito, son molte, parte delle quali, e forse le più considerabili, potrebbe esser che così improvvisamente non mi sovvenissero, ma nel progresso del ragionamento potrà accadere che destando io a voi, ed in particolare al Sig. Simplicio, obbiezioni e difficoltà, esse all' incontro mi facessero ricordar di quello, che senza tale eccitamento restasse dormendo nella fantasia; e però con la solita libertà sia lecito produrre in mezzo i nostri umani capricci, che tali meritamente possiamo nominarli in comparazione delle dottrine soprannaturali, sole vere e sicure determinatrici delle nostre controversie, e scorte inerranti nei nostri oscuri e dubbj sentieri, o piuttosto laberinti (2).

Tra le prime istanze, che si sogliono produrre contro a

(1) *E questa prova di Galileo somministrò forse al Torricelli il metodo così frequentemente da esso usato di risolver i solidi rotondi e scavati nelle lor infinite armille.*

(2) Qui esclama il Viviani: *Sentimento eroico e di Filosofo più che cristiano, perchè cattolico e santissimo, e non di ippocrita.*

quelli che compongono il continuo d'indivisibili, suole esser quella che uno indivisibile aggiunto a un altro indivisibile non produce cosa divisibile, perchè se ciò fusse, ne seguirebbe che anco l'indivisibile fusse divisibile; perchè quando due indivisibili, come, per esempio, due punti, congiunti facessero una quantità, qual sarebbe una linea divisibile, molto più sarebbe tale una composta di tre, di cinque, di sette e di altre moltitudini dispari; le quali linee essendo più segabili in due parti eguali, rendon segabile quell'indivisibile, che nel mezzo era collocato. In questa ed altre obbiezioni di questo genere si dà soddisfazione alla parte con dirgli, che non solamente due indivisibili, ma nè dieci, nè cento, nè mille non compongono una grandezza divisibile e quanta, ma sì bene infiniti.

Simp. Qui nasce subito un dubbio, che mi pare insolubile; ed è, che sendo noi sicuri trovarsi linee una maggior dell'altra, tuttavolta che amendue contengano punti infiniti bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggior dell'infinito, perchè la infinità dei punti della linea maggiore eccederà l'infinità dei punti della minore. Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito, mi par concetto da non poter esser capito in verun modo.

Salv. Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perchè stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convengano agl'infiniti, de' quali non si può dire uno esser maggiore o minore o eguale all'altro. Per prova di che già mi sovvenne un sì fatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al Sig. Simplicio che ha mossa la difficoltà.

Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.

Simp. So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione di un altro numero in sè medesimo, e così il 4, il 9 son numeri quadrati, nascendo quello dal 2, e questo dal 3 in sè medesimi moltiplicati.

SALV. Benissimo; e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si moltiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri moltiplicati in sè stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima; non è così?

SIMP. Non si può dir altrimenti.

SALV. Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvegnachè ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice ha il suo quadrato, nè quadrato alcuno ha più d'una sola radice, nè radice alcuna più di un quadrato solo.

SIMP. Così sta.

SALV. Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poichè non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato. E stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poichè tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine dei quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perchè sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto a dire la decima parte esser quadrati: in diecimila solo la centesima parte son quadrati, in un milione solo la millesima; e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.

SAGR. Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

SALV. Io non vedo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici; nè la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, nè questa maggior di quella: ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale, maggiore e minore non aver luogo negl'infiniti, ma solo

nelle qualità terminate. E però quando il Sig. Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono nè più, nè manco, nè altrettanti; ma in ciascheduna infiniti. O veramente se io gli rispondessi, i punti nell'una esser quanti sono i numeri quadrati; in un'altra maggiore, quanti tutti i numeri; in quella piccolina, quanti sono i numeri cubi, non potrei io avergli dato soddisfazione col porre più in una che nell'altra, e pure in ciascheduna infiniti? e questo è quanto alla prima difficoltà.

Sagr. Fermate in grazia, e concedetemi che io aggiunga al detto sin qui un pensiero, che pur ora mi giugne; e questo è, che, stante le cose dette sin qui, parmi che non solamente non si possa dire un infinito esser maggiore a un altro infinito, ma nè anco che ei sia maggior di un finito, perchè se il numero infinito fusse maggiore, v. g., del milione, ne seguirebbe, che passando dal milione ad altri ed altri continuamente maggiori, si camminasse verso l'infinito; il che non è: anzi per l'opposito a quanto maggiori numeri facciamo passaggio, tanto più ci discostiamo dal numero infinito; perchè nei numeri, quanto più si pigliano grandi, sempre più e più rari sono i numeri quadrati in essi contenuti: ma nel numero infinito i quadrati non possono esser manco che tutti i numeri, come pure ora si è concluso: adunque l'andare verso numeri sempre maggiori e maggiori, è un discostarsi dal numero infinito.

Salv. E così dal vostro ingegnoso discorso si conclude, gli attributi di maggiore, minore o eguale non aver luogo non solamente tra gl'infiniti, ma nè anco tra gl'infiniti e i finiti.

Passo ora ad un'altra considerazione, ed è, che stante che la linea ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non vedo come si possa sfuggire, la composizione essere d'infiniti indivisibili, perchè una divisione e suddivisione, che si possa proseguir perpetuamente, suppone che le parti sieno infinite, perchè altramente la suddivisione sa-

rebbe terminabile; e l'esser le parti infinite si tira in conseguenza l'esser non quante; perchè quanti infiniti fanno un'estensione infinita; e così abbiamo il continuo composto d'infiniti indivisibili.

Simp. Ma se noi possiamo proseguir sempre la divisione in parti quante, che necessità abbiamo noi di dover per tal rispetto introdur le non quante?

Salv. L'istesso poter proseguir perpetuamente la divisione in parti quante, induce la necessità della composizione d'infiniti non quanti. Imperocchè, venendo più alle strette, io vi domando che risolutamente mi diciate, se le parti quante nel continuo *terminato*, per vostro credere, son finite o infinite?

Simp. Io vi rispondo essere infinite e finite: infinite in potenza, e finite in atto. Infinite in potenza, cioè innanzi alla divisione, ma finite in atto, cioè dopo che son divise, perchè le parti non s'intendono attualmente esser nel suo tutto, se non dopo esser divise, o almeno segnate; altramente si dicono esservi in potenza.

Salv. Sì che una linea lunga, v. g., venti palmi, non si dice contener venti linee di un palmo l'una attualmente, se non dopo la divisione in venti parti eguali, ma per avanti si dice contenerle solamente in potenza. Or sia come vi piace, ditemi se, fatta l'attual divisione di tali parti, quel primo tutto cresce o diminuisce, o pur resta della medesima grandezza?

Simp. Non cresce, nè scema.

Salv. Così credo io ancora. Adunque le parti quante nel continuo, o vi sieno in atto, o vi sieno in potenza, non fanno la sua quantità maggiore nè minore; ma chiara cosa è, che parti quante attualmente contenute nel loro tutto, se sono infinite, lo fanno di grandezza infinita; adunque parti quante, benchè in potenza solamente infinite, non possono esser contenute se non in una grandezza infinita; adunque nella finita, parti quante infinite nè in atto nè in potenza possono esser contenute.

Sagr. Come dunque potrà esser vero, che il continuo

possa incessabilmente dividersi in parti capaci sempre di nuova divisione?

SALV. Par che quella distinzione d'atto e di potenza vi renda fattibile per un verso quel che per un altro sarebbe impossibile. Ma io vedrò d'aggiustar meglio queste partite con fare un altro computo. Ed al quesito, che domanda, se le parti quante nel continuo terminato sien finite o infinite, risponderò tutto l'opposito di quel che rispose dianzi il Signor Simplicio, cioè non esser nè finite nè infinite.

SIMP. Ciò non avrei saputo mai rispondere io, non pensando che si trovasse termine alcuno mezzano tra il finito e l'infinito, sì che la divisione o distinzione, che pone una cosa esser o finita o infinita, fusse manchevole e difettosa.

SALV. A me par ch'ella sia. E parlando delle quantità discrete, parmi che tra le finite e l'infinite vi sia un terzo medio termine, che è il rispondere ad ogni segnato numero; sì che domandato nel presente proposito, se le parti quante nel continuo siano finite o infinite, la più congrua risposta sia il dire non essere nè finite nè infinite, ma tante che rispondono ad ogni segnato numero; per lo che fare è necessario che elle non siano comprese dentro a un limitato numero, perchè non risponderebbono ad un maggiore; ma nè anco è necessario ch'elle siano infinite, perchè niuno assegnato numero è infinito. E così ad arbitrio del domandante una proposta linea gliela potremo assegnare in cento parti quante, e in mille e in cento mila, conforme a qual numero gli piacerà; ma divisa in infinite, questo non già. Concedo dunque ai signori filosofi che il continuo contiene quante parti quante piace loro, ed ammetto che le contenga in atto o in potenza a lor gusto e beneplacito; ma soggiungo poi, che nel modo che in una linea di dieci canne si contengono dieci linee d'una canna l'una, e quaranta d'un braccio l'una, e ottanta di mezzo braccio, così contiene ella punti infiniti; chiamateli poi in atto o in potenza, come più vi piace, che io, Sig. Simplicio, in questo particolare mi rimetto al vostro arbitrio e giudizio.

SIMP. Io non posso non laudare il vostro discorso: ma

ho gran paura che questa parità dell' esser contenuti i punti come le parti quante, non corra con intera puntualità; nè che a voi sarà così agevole il dividere la proposta linea in infiniti punti, come a quei filosofi in dieci canne o in quaranta braccia: anzi ho per impossibile del tutto il ridurre ad effetto tal divisione; sì che questa sarà una di quelle potenze che mai non si riducono in atto.

Salv. Il non essere una cosa fattibile se non con fatica o diligenza, o in gran lunghezza di tempo, non la rende impossibile, perchè penso che voi altresì non così agevolmente vi sbrigherete da una divisione da farsi d' una linea in mille parti, e molto meno dovendo dividerla in 937 o altro gran numero primo. Ma se questa, che voi per avventura stimate divisione impossibile, io ve la riducessi a così spedita, come se altri la dovesse segare in quaranta, vi contentereste voi di ammetterla più placidamente nella nostra conversazione?

Simp. Io gusto del vostro trattar, come fate talora, con qualche piacevolezza; ed al quesito vi rispondo, che la facilità mi parrebbe grande più che a bastanza, quando il risolverla in punti non fusse più laborioso che il dividerla in mille parti.

Salv. Qui voglio dirvi cosa, che forse vi farà maravigliare in proposito del volere o poter risolver la linea ne'suoi infiniti, tenendo quell' ordine che altri tiene nel dividerla in quaranta, sessanta o cento parti, cioè con l'andarla dividendo in due e poi in quattro; col qual ordine chi credesse di trovare i suoi infiniti punti, s' ingannerebbe indigrosso, perchè con tal progresso nè men alla division di tutte le parti quante si perverrebbe in eterno; ma degl' indivisibili tanto è lontano il poter giugner per cotale strada al cercato termine, che piuttosto altri se ne discosta, e mentre pensa, col continuar la divisione e col multiplicar la moltitudine delle parti, di avvicinarsi alla infinità, credo che sempre più se n' allontani: e la mia ragione è questa. Nel discorso avuto poco fa concludemmo, che nel numero infinito bisognava che tanti fussero i quadrati o i cubi quanti tutt' i numeri, poichè e

questi e quelli tanti sono quante le radici loro, e radici son tutt' i numeri. Vedemmo appresso, che quanto maggiori numeri si pigliavano, tanto più radi si trovavano in essi i lor quadrati, e più radi ancora i lor cubi: adunque è manifesto, che a quanto maggiori numeri noi trapassiamo, tanto più ci discostiamo dal numero infinito; dal che ne seguita che tornando indietro (poichè tal progresso sempre più ci allontana dal termine ricercato), se numero alcuno può dirsi infinito, questo sia l'unità. E veramente in essa son quelle condizioni e necessari requisiti del numero infinito, dico del contener in sè tanti quadrati quanti cubi, e quanti tutti i numeri.

Simp. Io non capisco bene come si debba intender questo negozio.

Salv. Il negozio non ha in sè dubbio veruno, perchè l'unità è quadrato, è cubo, è quadrato quadrato, e tutte le altre dignità; nè vi è particolarità veruna essenziale ai quadrati, ai cubi, che non convenga all'uno; come, v. g., proprietà di due numeri quadrati è l'aver tra di loro un numero medio proporzionale. Pigliate qualsivoglia numero quadrato per l'uno de' termini, e per l'altro l'unità, sempre ci troverete un numero medio proporzionale. Siano due numeri quadrati 9 e 4; eccovi tra il 9 e l'uno, medio proporzionale il 3, fra il 4 e l'uno media il 2, e tra i due quadrati 9 e 4 vi è il 6 in mezzo. Proprietà dei cubi è l'esser tra essi necessariamente due numeri medj proporzionali. Ponete 8 e 27, già tra loro son medi 12 e 18, e tra l'uno e l'8 mediano il 2 e il 4, tra l'uno e il 27 il 3 e il 9. Concludiamo pertanto non ci esser altro numero infinito che l'unità. E queste sono delle maraviglie che superano la capacità della nostra immaginazione, e che doveriano farci accorti quanto gravemente si erri mentre altri voglia discorrere intorno agl' infiniti con quei medesimi attributi che noi usiamo intorno ai finiti, le nature dei quali non hanno veruna convenienza tra di loro.

In proposito di che non voglio tacervi un mirabile accidente, che pur ora mi sovviene, esplicante l'infinita diffe-



renzà, anzi repugnanza e contrarietà di natura, che incontrerebbe una quantità terminata nel trapassare all'infinita. Segniamo questa linèa retta AB (*Fig.* 7) di qualsivoglia lunghezza; e preso in lei qualsivoglia punto C, che in parti diseguali la divida, dico che partendosi coppie di linee dai termini A, B, che, ritenendo fra di loro la medesima proporzione che hanno le parti AC, BC, vadanò a concorrere insieme, i punti dei loro concorsi andranno tutti nella circonferenza di un medesimo cerchio: come per esempio partendosi le AL, BL dai punti A, B, ed avendo fra di loro la medesima proporzione che hanno le parti AC, BC, e andando a concorrere nel punto L, e ritenendo l'istessa proporzione altre due AK, BK, concorrendo in K, e altre AI, BI, AH, BH, AG, GB, AF, FB, AE, EB, dico che i punti dei concorsi C, L, K, I, H, G, F, E cascano tutti nella circonferenza di un istesso cerchio; talchè se c'immagineremo il punto C muoversi continuamente con tal legge, che le linee da esso prodotte sino ai termini fissi A, B mantengano sempre la proporzione medesima che hanno le prime parti AC, CB, tal punto C descriverà la circonferenza di un cerchio, come appresso vi dimostrerò. Ed il cerchio in cotal modo descritto sarà sempre maggiore e maggiore infinitamente, secondo che il punto C sarà preso più vicino al punto di mezzo, che sia O, e minore sarà quel cerchio che dal punto più vicino all'estremità B sarà descritto; in maniera che dai punti infiniti che pigliar si possono nella linea OB, si descriveranno cerchi (movendoli con l'esplicata legge) di qualsivoglia grandezza, minori della luce dell'occhio di una pulce, e maggiori dell'equinoziale del primo mobile. Ora se alzandosi qualsivoglia dei punti compresi tra i termini O, B, da tutti si descrivono cerchi, e immensi dai punti prossimi all'O, alzando l'istesso O, e continuando di muoverlo con l'osservanza dell'istesso decreto, cioè che le linee da esso prodotte sino ai termini A, B ritengano la proporzione che hanno le prime linee AO, OB, che linea verrà segnata? Segnerassi la circonferenza di un cerchio, ma di un cerchio maggiore di tutti gli altri massimi, di un cerchio dunque infinito; ma si segna

anco una linea retta e perpendicolare sopra la BA eretta dal punto O, e prodotta in infinito senza mai tornare a riunire il suo termine ultimo col suo primo, come ben tornavano l'altre; imperocchè la segnata per lo moto limitato del punto C, dopo segnato il mezzo cerchio superiore CHE, continuava di segnare l' inferiore EMC riunendo insieme i suoi estremi termini nel punto C. Ma il punto O mossosi per segnar come tutti gli altri della linea AB (perchè i punti presi nell'altra parte OA descriveranno essi ancora lor cerchi, ed i massimi i punti prossimi all' O) il suo cerchio per farlo massimo di tutti, e per conseguenza infinito, non può più ritornare nel suo primo termine, ed in somma descrive una linea retta infinita per circonferenza del suo infinito cerchio. Considerate ora qual differenza sia da un cerchio finito a un infinito, poichè questo muta talmente l'essere, che totalmente perde l'essere e il potere essere; che già ben chiaramente comprendiamo non si poter dare un cerchio infinito; il che si tira poi in conseguenza, nè meno potere essere una sfera infinita nè altro qualsivoglia corpo o superficie figurata e infinita. Or che diremo di cotali metamorfosi nel passar dal finito all'infinito? E perchè dobbiamo sentir repugnanza maggiore, mentre, cercando l' infinito nei numeri, andiamo a concluderlo nell' uno? E mentre che rompendo un solido in molte parti, e seguitando di ridurlo in minutissima polvere, risoluto che si fusse negl' infiniti suoi atomi non più divisibili, perchè non potremo dire quello esser ritornato in un sol continuo, ma forse fluido, come l' acqua o il mercurio o il medesimo metallo liquefatto? E non vediamo noi le pietre liquefarsi in vetro, e il vetro medesimo col molto fuoco farsi fluido più che l' acqua?

Sagr. Dobbiamo dunque credere i fluidi esser tali, perchè sono risoluti nei primi infiniti indivisibili suoi componenti?

Salv. Io non so trovar miglior ripiego per risolvere alcune sensate apparenze, tra le quali una è questa. Mentre io piglio un corpo duro, o sia pietra o metallo, e che con un martello o sottilissima lima lo vo al possibile dividendo in

minutissima ed impalpabile polvere, chiara cosa è che i suoi minimi, ancorchè per la lor piccolezza siano impercettibili a uno a uno dalla nostra vista e dal tatto, tuttavia sono eglino ancor quanti, figurati e numerabili; e di essi accade che accumulati insieme si sostengono ammucchiati; e scavati sino a certo segno, resta la cavità, senza che le parti d'intorno scorrano a riempirla; agitati e commossi, subito si fermano tantosto che il motore esterno li abbandona. E questi medesimi effetti fanno ancora tutti gli aggregati di corpuscoli maggiori e maggiori, e di ogni figura, ancor che sferica, come vediamo nei monti di miglio, di grano, di migliarole di piombo e di ogni altra materia. Ma se noi tenteremo di vedere tali accidenti nell'acqua, nessuno ve ne troveremo, ma sollevata, immediatamente si spiana, se da vaso o altro esterno ritegno non sia sostenuta; incavata, subito scorre a riempier la cavità, ed agitata, per lunghissimo tempo va fluttuando e per ispazj grandissimi distendendo le sue onde. Da questo mi par di potere molto ragionevolmente arguire, i minimi dell'acqua, nei quali ella pur sembra esser risoluta (poichè ha minor consistenza di qualsivoglia sottilissima polvere, anzi non ha consistenza nessuna), esser differentissimi dai minimi quanti e divisibili, nè saprei ritrovarvi altra differenza che l'essere indivisibili. Parmi anco che la sua esquisitissima trasparenza ce ne porga assai ferma conghiettura; perchè se noi piglieremo del più trasparente cristallo che sia, e lo cominceremo a rompere e pestare, ridotto in polvere perde la trasparenza, e sempre più quanto più sottilmente si trita; ma l'acqua, che pur è sommamente trita, è anco sommamente diafana. L'oro e l'argento, con acque forti polverizzati più sottilmente che con qualsivoglia lima, pur restano in polvere, ma non divengon fluidi; nè prima si liquefanno, che gl'indivisibili del fuoco o dei raggi del sole li dissolvano, credo, nei loro primi altissimi componenti infiniti, indivisibili.

Sagr. Questo, che V. S. ha toccato della luce, ho io più volte veduto con maraviglia; veduto, dico, con uno specchio concavo di tre palmi di diametro, liquefare il piombo in un istante; onde io son venuto in opinione, che quando lo spec-

chio fusse grandissimo e ben terso e di figura parabolica, liquefarebbe non meno ogni altro metallo in brevissimo tempo, vedendo che quello nè molto grande, nè ben lustro, e di cavità sferica, con tanta forza liquefaceva il piombo ed abbruciava ogni materia combustibile: effetti che rendon credibili le maraviglie degli specchi di Archimede.

Salv. Intorno agli effetti degli specchi di Archimede mi rende credibile ogni miracolo, che si legge in più scrittori, la lettura dei libri dell'istesso Archimede, già da me con infinito stupore letti e studiati: e se nulla di dubbio mi fusse restato, quello che ultimamente ha dato in luce intorno allo Specchio Ustorio il P. Buonaventura Cavalieri, e che io con ammirazione ho letto, è bastato a levarmi ogni difficoltà.

Sagr. Vidi ancor io cotesto trattato, e con gusto e maraviglia grande lo lessi, e perchè per avanti aveva conoscenza della persona, mi andai confermando nel concetto che di esso aveva già preso, ch'ei fusse per riuscire uno de' principali matematici dell' età nostra. Ma tornando all'effetto maraviglioso dei raggi solari nel liquefare i metalli, dobbiamo noi credere che tale e sì veemente operazione sia senza moto, o pur che sia col moto, ma velocissimo?

Salv. Gli altri incendi e dissoluzioni veggiamo noi farsi con moto, e con moto velocissimo. Vedansi le operazioni dei fulmini, della polvere nelle mine e nei petardi, ed in somma quanto il velocitar coi mantici la fiamma dei carboni, mista con i vapori grossi e non puri, accresca di forza nel liquefare i metalli: onde io non saprei intendere che l' azione della luce, benchè purissima, potesse esser senza moto, ed anco velocissimo.

Sagr. Ma quale e quanta dobbiamo noi stimare che sia questa velocità del lume? forse instantanea, momentanea o pur come gli altri movimenti temporanea? nè potremo con esperienza assicurare quale ella sia?

Simp. Mostra l'esperienza quotidiana l'espansion del lume esser istantanea; mentre che vedendo in gran lontananza sparar un' artiglieria, lo splendor della fiamma senza interposi-

zion di tempo si conduce agli occhi nostri, ma non già il suono all'orecchie, se non dopo notabile intervallo di tempo.

Sagr. Eh! Sig. Simplicio, da cotesta notissima esperienza non si raccoglie altro se non che il suono si conduce al nostro udito in tempo men breve di quello che si conduca il lume; ma non mi assicura, se la venuta del lume sia per ciò instantanea più che temporanea, ma velocissima. Nè simile osservazione conclude più che l'altra di chi dice: subito giunto il sole all'orizzonte, arriva il suo splendore agli occhi nostri; imperocchè chi mi assicura che prima non giugnessero i suoi raggi al detto termine, che alla nostra vista?

Salv. La poca concludenza di queste e di altre simili osservazioni mi fece una volta pensare a qualche modo di poterci senza errore accertare, se l'illuminazione, cioè se la espansion del lume, fusse veramente instantanea; poichè il moto assai veloce del suono ci assicura, quella della luce non poter esser se non velocissima. E l'esperienza che mi sovvenne fu tale. Voglio che due piglino un lume per uno, il quale, tenendolo dentro la lanterna o altro ricetto, possino andar coprendo e scoprendo con l'interposizion della mano alla vista del compagno; e che ponendosi l'uno incontro all'altro in distanza di poche braccia, vadano addestrandosi nello scoprire ed occultare il lor lume alla vista del compagno, sì che quando l'uno vede il lume dell'altro, immediatamente scuopra il suo; la qual corrispondenza, dopo alcune risposte fattesi scambievolmente, verrà loro talmente aggiustata, che senza sensibile svario alla scoperta dell'uno risponderà immediatamente la scoperta dell'altro, sì che quando l'uno scuopre il suo lume vedrà nell'istesso tempo comparire alla sua vista il lume dell'altro. Aggiustata cotal pratica in questa piccolissima distanza, pongansi i due medesimi compagni con due simili lumi in lontananza di due o tre miglia; e tornando di notte a far l'istessa esperienza, vadano osservando attentamente se le risposte delle loro scoperte e occultazioni seguono secondo l'istesso tenore che facevano da vicino; che seguendo, si potrà assai sicuramente concludere,

l' espansion del lume essere instantanea; che quando ella ricercasse tempo, in una lontananza di tre miglia, che importano sei, per l' andata d' un lume e venuta dell' altro, la dimora dovrebbe essere assai osservabile. E quando si volesse far tale osservazione in distanze maggiori, cioè di otto o dieci miglia, potremmo servirci del telescopio, aggiustandone uno per uno gli osservatori al luogo dove la notte si hanno a mettere in pratica i lumi, li quali ancorchè non molto grandi, e perciò invisibili in tanta lontananza all' occhio libero, ma ben facili a coprirsi e scoprirsi, coll' aiuto dei telescopi già aggiustati e fermati potranno essere comodamente veduti.

Sagr. L' esperienza mi pare d' invenzion non men sicura che ingegnosa; ma diteci quello che nel praticarla avete concluso.

Salv. Veramente non l' ho sperimentata, salvo che in lontananza piccola, cioè manco d' un miglio, dal che non ho potuto assicurarmi se veramente la comparsa del lume opposto sia instantanea; ma ben, se non instantanea, velocissima, e direi momentanea, è ella; e per ora l' assimiglierei a quel moto che vediamo farsi dallo splendore del baleno veduto tra le nugole lontane otto o dieci miglia: del qual lume distinguiamo il principio, e dirò il capo e fonte, in un luogo particolare tra esse nugole, ma ben immediatamente segue la sua espansione amplissima per le altre circostanti: che mi pare argomento, quella farsi con qualche poco di tempo; perchè quando l' illuminazione fusse fatta tutta insieme, e non per parti, non par che si potesse distinguere la sua origine, e dirò il suo centro, dalle sue falde e dilatazioni estreme. Ma in quai pelaghi ci andiamo noi inavvertentemente pian piano ingolfando? tra i vacui, tra gl' infiniti, tra gl' indivisibili, tra i movimenti instantanei, per non poter mai dopo mille discorsi giugnere a riva.

Sagr. Cose veramente molto sproporzionate al nostro intendimento. Ecco l'infinito, cercato tra i numeri, par che vada a terminare nell' unità: dagl' indivisibili nasce il sempre divisibile: il vacuo non par che risegga se non indivisibilmente mescolato tra il pieno; ed in somma in queste cose si muta

talmente la natura delle comunemente intese da noi, che sin la circonferenza d' un cerchio diventa una linea retta infinita; che, s' io ho ben tenuto a memoria, è quella proposizione che voi, Sig. Salviati, dovevate con geometrica dimostrazione far manifesta. Però, quando vi piaccia, sarà bene senza più digredire, arrecarcela.

SALV. Eccomi a servirle, dimostrando per piena intelligenza il seguente problema: Data una linea retta divisa secondo qualsivoglia proporzione in parti diseguali, descrivere un cerchio, alla cui circonferenza prodotte a qualsivoglia punto di essa due linee rette, dai termini della data linea ritengano la proporzion medesima che hanno tra di loro le parti di essa linea data, sì che omologhe siano quelle che si partono dai medesimi termini.

Sia la data retta linea AB (*Fig.* 8) divisa in qualsivoglia modo in parti diseguali nel punto C; bisogna descrivere il cerchio, a qualsivoglia punto della cui circonferenza concorrendo due rette prodotte dai termini A, B, abbiano tra di loro la proporzion medesima che hanno tra di loro le parti AC, BC, sì che omologhe sian quelle che si partono dall' istesso termine. Sopra il centro C, coll' intervallo della minor parte CB, intendasi descritto un cerchio, alla circonferenza del quale venga tangente dal punto A la retta AD indeterminatamente prolungata verso E, e sia il contatto in D, e congiungasi la CD, che sarà perpendicolare alla AE; ed alla BA sia perpendicolare la BE, la quale prodotta concorrerà con la AE, essendo l'angolo A acuto: sia il concorso in E, di dove si ecciti la perpendicolare alla AE, che prodotta vada a concorrere con la AB infinitamente prolungata in F. Dico primieramente le due rette FE, FC esser eguali; imperocchè tirata la EC, avremo nei due triangoli DEC, BEC li due lati dell' uno DE, EC eguali alli due dell' altro BE, EC, essendo le due DE, EB tangenti del cerchio DB, e le basi DC, CB parimente eguali; onde li due angoli DEC, BEC saranno eguali. E perchè all' angolo BCE per esser retto manca quanto è l' angolo CEB, ed all' angolo CEF pur per esser retto manca quanto è l' angolo CED, essendo tali mancamenti eguali, gli

angoli FCE, FEC saranno eguali, ed in conseguenza i lati FE, FC; onde fatto centro il punto F, e coll' intervallo FE descrivendo un cerchio passerà pel punto C. Descrivasi, e sia CEG. Dico questo essere il cerchio ricercato, a qualsivoglia punto della circonferenza del quale ogni coppia di linee che vi concorrano, partendosi dai termini A, B, avranno la medesima proporzione tra di loro che hanno le due parti AC, BC, le quali di già vi concorrono nel punto C. Questo delle due che concorrono nel punto E, cioè delle AE, BE, è manifesto, essendo l' angolo E del triangolo AEB diviso in mezzo dalla CE; per lo che qual proporzione ha la AC alla CB, tale ha la AE alla BE. L' istesso proveremo delle due AG, BG terminate nel punto G. Imperocchè essendo (per la similitudine dei triangoli AFE, EFB) come AF ad FE, così EF ad FB, cioè come AF ad FC, così CF ad FB, sarà, dividendo, come AC, CF (cioè ad FG) così CB a BF, e tutta AB a tutta BG, come una CB ad una BF; e componendo, come AG a GB, così CF ad FB, cioè EF ad FB, cioè AE ad EB, ed AC a CB, il che bisognava provare. Prendasi ora qualsivoglia altro punto nella circonferenza, e sia H, al quale concorrano le due AH, BH. Dico parimente, come AC a CB, così essere AH ad HB. Prolunghisi HB sino alla circonferenza in I, e congiungasi IF. E perchè già si è visto come AB a BG, così essere CB a BF, sarà il rettangolo ABF eguale al rettangolo CBG, cioè IBH; e però come AB a BH, così IB a BF, e sono gli angoli al B eguali, adunque AH ad HB sta come IF, cioè EF, ad FB, ed AE ad EB.

Dico, oltre a ciò, che è impossibile che le linee che abbiano tal proporzione, partendosi dai termini A, B, concorrano a verun punto o dentro o fuori del cerchio CEG. Imperocchè, se è possibile, concorrano due tali linee al punto L posto fuori, e siano le AL, BL, e prolunghisi la LB sino alla circonferenza in M, e congiungasi MF. Se dunque la AL alla BL è come la AC alla BC, cioè come la MF alla FB, avremo due triangoli ALB, MFB, li quali intorno alli due angoli ALB, MFB hanno i lati proporzionali, gli angoli alla cima nel punto B eguali, e li due rimanenti FMB, LAB minori che retti.

(Imperocchè l'angolo retto al punto M ha per base tutto il diametro CG, e non la sola parte BF, e l'altro al punto A è acuto, perchè la linea AL omologa della AC è maggiore della BL omologa della BC). Adunque i triangoli ABL, MBF son simili: e però come AB a BL, così MB a BF, onde il rettangolo ABF sarà eguale al rettangolo MBL; ma il rettangolo ABF s'è dimostrato eguale al CBG; adunque il rettangolo MBL è eguale al rettangolo CBG, il che è impossibile; adunque il concorso non può cader fuor del cerchio. E nel medesimo modo si dimostrerà non poter cader dentro; adunque tutti i concorsi cascano nella circonferenza stessa.

Ma è tempo che torniamo a dar soddisfazione al desiderio del Sig. Simplicio, mostrandogli come il risolver la linea ne' suoi infiniti punti non è non solamente impossibile, ma nè meno ha in sè maggior difficoltà che il distinguere le sue parti quante, fatto però un supposto, il quale penso, Sig. Simplicio, che non siate per negarmi; e questo è che non mi ricercherete che io vi separi i punti l'uno dall'altro, e ve li faccia veder a uno a uno distinti sopra questa carta; perchè io ancora mi contenterei che senza staccar l'una dall'altra le quattro o le sei parti d'una linea, mi mostraste le sue divisioni segnate, o al più piegate ad angoli, formandone un quadrato o un esagono; perchè mi persuado pure che allora le chiamereste a bastanza distinte e attuate.

SIMP. Veramente sì.

SALV. Ora se l'inflettere una linea ad angoli, formandone ora un quadrato, ora un ottangolo, ora un poligono di quaranta, di cento o di mille angoli, è mutazione bastante a ridurre all'atto quelle quattro, otto, quaranta, cento e mille parti che prima nella linea diritta erano per vostro detto in potenza, quando io formi di lei un poligono di lati infiniti, cioè quando io la infletta nella circonferenza d'un cerchio, non potrò io con pari licenza dire d'aver ridotto all'atto quelle parti infinite, che voi prima, mentre era retta, dicevate esser in lei contenute in potenza? nè si può negare tal risoluzione esser fatta ne' suoi infiniti punti non meno che quella nelle sue quattro parti nel formarne un quadrato, o nelle sue

mille nel formarne un millagono; imperocchè in lei non manca veruna delle condizioni che si trovano nel poligono di mille e di cento mila lati. Questo applicato a una linea retta se gli posa sopra toccandola con uno de' suoi lati, cioè con una sua millesima parte; il cerchio, che è un poligono di lati infiniti, tocca la medesima retta con uno de' suoi lati, che è un sol punto diverso da tutti i suoi collaterali, e perciò da quelli diviso e distinto non meno che un lato del poligono dai suoi conterminali. E come il poligono rivoltato sopra un piano stampa con i toccamenti conseguenti de' suoi lati una linea retta eguale al suo perimetro; così il cerchio girato sopra un tal piano descrive con gl' infiniti suoi successivi contatti una linea retta eguale alla propria circonferenza. Non so adesso, Sig. Simplicio, se i Signori Peripatetici, ai quali io ammetto, come verissimo concetto, il continuo esser divisibile in sempre divisibili, sì che continuando una tal divisione e suddivisione, mai non si perverrebbe alla fine, si contenteranno di concedere a me niuna delle tali loro divisioni esser l' ultima, come veramente non è, poichè sempre ve ne resta un' altra; ma bene l' ultima e altissima esser quella che lo risolve in infiniti indivisibili, alla quale concedo che non si perverrebbe mai dividendo successivamente in maggiore e maggior moltitudine di parti: ma servendosi della maniera, che propongo io di distinguere e risolvere tutta la infinità in un tratto solo (artifizio che non mi dovrebbe esser negato), crederei che dovessero quietarsi, ed ammetter questa composizione del continuo di atomi assolutamente indivisibili. E massime essendo questa una strada forse più d' ogni altra corrente per trarci fuori di molto intrigati laberinti, quali sono, oltre a quello già toccato della coerenza delle parti dei solidi, il comprender come stia il negozio della rarefazione e della condensazione, senza incorrer per causa di quella nell' inconveniente di dovere ammettere spazj vacui, e per questa la penetrazione dei corpi: inconvenienti, che amendue mi pare che assai destramente vengano schivati coll' ammetter detta composizione d' indivisibili.

Simp. Io non so quello che i Peripatetici fusser per dire;

atteso che le considerazioni fatte da voi credo che gli giugnerebbero per la maggior parte nuove, e come tali converrebbe esaminarle; e potrebbe accadere che quelli vi ritrovassero risposte e soluzioni potenti a sciorre quei nodi, che io, per la brevità del tempo e per la debolezza del mio ingegno, non saprei di presente risolvere. Però sospendendo per ora questa parte, sentirei ben volentieri come l'introduzione di questi indivisibili faciliti l'intelligenza della condensazione e della rarefazione, schivando nell'istesso tempo il vacuo e la penetrazion dei corpi.

Sagr. Sentirò io ancora con gran brama la medesima cosa all'intelletto mio tanto oscura, con questo però che io non rimanga defraudato di sentire, conforme a quello che poco fa disse il Sig. Simplicio, le ragioni d'Aristotile in confutazion del vacuo, ed in conseguenza le soluzioni che voi gli arrecate, come convien fare, mentre voi ammettete quello che esso nega.

Salv. Faremo l'uno e l'altro. E quanto al primo, è necessario che sì come in grazia della rarefazione ci serviamo della linea descritta dal minor cerchio, maggiore della propria circonferenza, mentre vien mosso alla rivoluzione del maggiore, così per intelligenza della condensazione mostriamo come alla conversione fatta dal minor cerchio, il maggiore descriva una linea retta minore della sua circonferenza; per la cui più chiara esplicazione porremo innanzi la considerazione di quello che accade nei poligoni. In una descrizione simile a quell'altra siano due esagoni circa il comune centro L (*Fig.* 9), che siano questi ABG, HIK colle linee parallele HOM, ABC, sopra le quali si abbiano a far le revoluzioni; e fermato l'angolo I del poligono minore, volgasi esso poligono sin che il lato IK caschi sopra la parallela, nel qual moto il punto K descriverà l'arco KM, e il lato KI si unirà colla parte IM. Tra tanto bisogna vedere quel che farà il lato GB del poligono maggiore. E perchè il rivolgimento si fa sopra il punto I, la linea IB col termine suo B descriverà, tornando indietro, l'arco B*b* sotto alla parallela CA, tal che quando il lato KI si congiugnerà colla linea MI, il lato BG

si unirà con la linea *b*C, con l'avanzarsi per l'innanzi solamente quanto è la parte BC, e ritirando indietro la parte suttesa all' arco B*b*, la quale vien soprapposta alla linea BA. Ed intendendo continuarsi nell'istesso modo la conversione fatta dal minor poligono, questo descriverà bene e passerà sopra la sua parallela una linea eguale al suo perimetro, ma il maggiore passerà una linea minore del suo perimetro la quantità di tante linee *b*B quanti sono uno manco de' suoi lati; e sarà tal linea prossimamente eguale alla descritta dal poligono minore, eccedendola solamente di quanto è la *b*B. Qui dunque senza veruna repugnanza si scorge la cagione per la quale il maggior poligono non trapassi (portato dal minore) con i suoi lati linea maggiore della passata dal minore; che è perchè una parte di ciascheduno si soprappone al suo precedente conterminale.

Ma se considereremo i due cerchi intorno al centro A, li quali sopra le lor parallele posino, toccando il minore la sua nel punto B, ed il maggiore la sua nel punto C, qui nel cominciare a far la revoluzione del minore, non avverrà che il punto B resti per qualche tempo immobile, sì che la linea BG dando in dietro trasporti il punto C, come accadeva nei poligoni, che restando fisso il punto I sin che il lato KI cadesse sopra la linea IM, la linea IB riportava indietro il B termine del lato GB sino in *b*, onde il lato BG cadeva in *b*C soprapponendo alla linea BA la parte B*b*, e solo avanzandosi per l'innanzi la parte BC eguale alla IM, cioè a un lato del poligono minore; per le quali soprapposizioni, che sono gli eccessi dei lati maggiori sopra i minori, gli avanzi che restano, eguali ai lati del minor poligono, vengono a comporre nell' intera revoluzione la linea retta eguale alla segnata e misurata dal poligono minore. Ma qui dico che se noi vorremo applicare un simil discorso all' effetto dei cerchi, converrà dire, dove i lati di qualsivoglia poligono son compresi da qualche numero, i lati del cerchio sono infiniti; quelli son quanti e divisibili, questi non quanti e indivisibili; i termini dei lati del poligono nella revoluzione stanno per qualche tempo fermi, cioè ciaschedùno tal parte del tempo di una

intera conversione, qual parte esso è di tutto il perimetro; nei cerchi similmente le dimore de' termini de' suoi infiniti lati son momentanee, che tal parte è un istante di un tempo quanto, quale è un punto di una linea che ne contiene infiniti; i regressi indietro fatti dai lati del maggior poligono sono non di tutto il lato, ma solamente dell'eccesso suo sopra il lato del minore, acquistando per l'innanzi tanto di spazio, quanto è il detto minor lato; nei cerchi il punto o lato C, nella quiete instantanea del termine B, si ritira indietro quanto è il suo eccesso sopra il lato B, acquistando per l'innanzi quanto è il medesimo B. Ed in somma gl'infiniti lati indivisibili del maggior cerchio cogl'infiniti indivisibili ritiramenti loro, fatti nell'infinite instantanee dimore degl'infiniti termini degl'infiniti lati del minor cerchio, e con i loro infiniti progressi eguali agl'infiniti lati di esso minor cerchio, compongono e disegnano una linea eguale alla descritta dal minor cerchio, contenente in sè infinite soprapposizioni non quante, che fanno una costipazione e condensazione senza veruna penetrazione di parti quante, quale non si può intendere farsi nella linea divisa in parti quante, quale è il perimetro di qualsivoglia poligono, il quale disteso in linea retta non si può ridurre in minor lunghezza, se non col far che i lati si soprappongano e penetrino l'un l'altro. Questa costipazione di parti non quante ma infinite senza penetrazione di parti quante, e la prima distrazione di sopra dichiarata degl'infiniti indivisibili con l'interposizione di vacui indivisibili, credo che sia il più che dir si possa per la condensazione e rarefazione dei corpi, senza necessità d'introdurre la penetrazione dei corpi, o gli spazi quanti vacui. Se ci è cosa che vi gusti fatene capitale, se no riputatela vana, e il mio discorso ancora, e ricercate di qualche altra esplicazione di maggior quiete per l'intelletto. Solo queste due parole vi replico, che noi siamo tra gl'infiniti e gl'indivisibili.

Sagr. Che il pensiero sia sottile, ed a' miei orecchi nuovo e peregrino, lo confesso liberamente; se poi nel fatto stesso la natura proceda con tale ordine, non saprei che risolvermi: vero è che sin che io non sentissi cosa che maggiormente

mi quietasse, per non rimaner muto affatto, mi atterrei a questa. Ma forse il Sig. Simplicio avrà (quello che fin qui non ho incontrato) modo di esplicare l'esplicazione, che in materia così astrusa dai filosofi si arreca; che in vero quel che sin qui ho letto circa la condensazione, è per me così denso, e quel della rarefazione così sottile, che la mia debol vista questo non comprende e quello non penetra.

Simp. Io son pieno di confusione, e trovo duri intoppi nell'un sentire e nell'altro, e in particolare in questo nuovo, perchè secondo questa regola un'oncia di oro si potrebbe rarefare e distrarre in una mole maggiore di tutta la terra, e tutta la terra condensare e ridurre in minor mole di una noce: cose che io non credo, nè credo che voi medesimo crediate; e le considerazioni e dimostrazioni sin qui fatte da voi, come che son cose matematiche astratte e separate dalla materia sensibile, credo che applicate alle materie fisiche e naturali non camminerebbero secondo coteste regole.

Salv. Che io vi sia per far vedere l'invisibile, nè io lo saprei fare, nè credo voi lo ricerchiate, ma per quanto dai nostri sensi può esser compreso, giacchè voi avete nominato l'oro, non veggiam noi farsi immensa distrazione delle sue parti? Non so se vi sia occorso il veder le maniere che tengono gli artefici in condur l'oro tirato, il quale non è veramente oro se non in superficie, ma la materia interna è argento; e il modo del condurlo è tale. Pigliano un cilindro, o volete dire una verga di argento lunga circa mezzo braccio, e grossa per tre o quattro volte il dito pollice, e questa indorano con foglie di oro battuto, che sapete esser così sottile che quasi va vagando per l'aria, e di tali foglie ne soprappongono otto o dieci e non più. Dorato che è, cominciano a tirarlo con forza immensa, facendolo passare per i fori della filiera, tornando a farlo ripassare molte e molte volte successivamente per fori più angusti, sì che dopo molte e molte ripassate lo riducono alla sottigliezza di un capello di donna, se non maggiore, e tuttavia resta dorato in superficie. Lascio ora considerare a voi quale sia la sottigliezza e distrazione, alla quale si è ridotta la sustanza dell'oro.

Simp. Io non vedo che da questa operazione venga in conseguenza un assottigliamento della materia dell' oro da farne quelle maraviglie che voi vorreste: prima, perchè già la prima doratura fu di dieci foglie di oro, che vengono a far notabile grossezza: secondariamente, sebben nel tirare e assottigliar quell' argento cresce in lunghezza, scema però anco tanto in grossezza, che compensando l' una dimensione con l' altra, la superficie non si augumenta tanto, che per vestir l' argento di oro bisogni ridurlo a sottigliezza maggiore di quella delle prime foglie.

Salv. V' ingannate di assai, Sig. Simplicio, perchè l' accrescimento della superficie è sudduplo dell' allungamento, come io potrei geometricamente dimostrarvi.

Sagr. Io, e per me e pel Sig. Simplicio, vi pregherei a recarci tal dimostrazione, se però credete che da noi possa esser capita.

Salv. Vedrò se così improvvisamente mi torna a memoria. Già è manifesto che quel primo grosso cilindro di argento ed il filo lunghissimo tirato sono due cilindri eguali, essendo l' istesso argento; talchè s' io mostrerò qual proporzione abbiano tra di loro le superficie dei cilindri eguali, averemo l' intento. Dico per tanto che

La superficie dei cilindri eguali, trattone le basi, son tra di loro in sudduplicata proporzione delle loro lunghezze, *ovvero in reciproca proporzione dei diametri delle basi. Ed essendo prismi eguali sopra simili basi, le medesime loro superficie sono in sudduplа proporzione delle loro lunghezze, ovvero in reciproca proporzione de' lati omologhi delle loro basi.*

Siano due cilindri eguali (*Fig.* 10), l'altezze dei quali AB, CD, e sia la linea E media proporzionale tra esse. Dico, la superficie del cilindro AB, trattone le basi, alla superficie del cilindro CD, trattone parimente le basi, aver la medesima proporzione che la linea AB alla linea E, che è suddupla dalla proporzione di AB a CD, *ovvero che il diametro della base C al diametro della base A*. Taglisi la parte del cilindro AB in F, e sia l' altezza AF eguale alla CD. E perchè le basi dei cilindri eguali rispondon contrariamente alle loro altezze, il

cerchio base del cilindro CD al cerchio base del cilindro AB sarà come l'altezza BA alla DC; e perchè i cerchi son tra loro come i quadrati dei diametri, avranno detti quadrati la medesima proporzione che la BA alla CD; ma come BA a CD così il quadrato BA al quadrato della E; son dunque tali quattro quadrati proporzionali; e però i lor lati ancora saranno proporzionali; e come la linea AB alla E, così il diametro del cerchio C al diametro del cerchio A; ma come i diametri, così sono le circonferenze, e come le circonferenze così sono ancora le superficie dei cilindri egualmente alti; adunque come la linea AB alla E, così la superficie del cilindro CD alla superficie del cilindro AF. Perchè dunque l'altezza AF alla AB sta come la superficie AF alla superficie AB; e come l'altezza AB alla linea E, così la superficie CD alla AF; sarà, per la perturbata, come l'altezza AF alla E, così la superficie CD alla superficie AB; e convertendo, come la superficie del cilindro AB alla superficie del cilindro CD, così la linea E alla AF, cioè alla CD, ovvero la AB alla E, che è proporzione suddupla della AB alla CD; *ma come AB ad AE così fu provato star il diametro del cerchio C al diametro del cerchio A, adunque la superficie del cilindro AB a quella dell'eguale CD sta come il diametro del cilindro CD al diametro dell'AB*, che è quello che bisognava provare.

Ora se noi applicheremo questo, che si è dimostrato, al nostro proposito, presupposto che quel cilindro di argento che fu dorato, mentre non era più lungo di mezzo braccio, e grosso tre o quattro volte più del dito pollice, assottigliato alla finezza di un capello si sia allungato sino in venti mila braccia (che sarebbe anche più assai), troveremo la sua superficie esser cresciuta dugento volte più di quello che era; ed in conseguenza quelle foglie di oro, che furon soprapposte dieci in numero, distese in superficie dugento volte maggiore, ci assicurano, l'oro, che cuopre la superficie delle tante braccia di filo, restar non più grosso che la ventesima parte di una foglia dell'ordinario oro battuto. Considerate ora voi qual sia la sua sottigliezza, e se è possibile concepirla fatta senza una immensa distrazione di parti; e se questa vi pare una

esperienza che tenda anche ad una composizione d' infiniti indivisibili nelle materie fisiche: sebben di ciò non mancano altri più gagliardi e concludenti rincontri.

SAGR. La dimostrazione mi par tanto bella, che quando non avesse forza di persuader quel primo intento per lo quale è stata prodotta (che pur mi par che ve l' abbia grande), ad ogni modo benissimo si è impiegato questo breve tempo, che per sentirla si è speso.

SALV. Giacchè veggo che gustate tanto di queste geometriche dimostrazioni apportatrici di guadagni sicuri, vi dirò la compagna di questa, che soddisfà ad un quesito curioso assai. Nella passata abbiamo quello che accaggia dei cilindri eguali, ma diversi di altezze, ovvero lunghezze: è ben sentire quello che avvenga ai cilindri eguali di superficie, ma diseguali di altezze; intendendo sempre delle superficie sole, che gli circondano intorno, cioè non comprendendo le due basi superiore e inferiore. Dico dunque che

I cilindri retti, le superficie dei quali, trattone le basi, sieno eguali, hanno fra di loro la medesima proporzione che le loro altezze contrariamente prese, *ovvero in omologa proporzione de' diametri delle basi, o de' lati omologhi delle basi essendo prismi.*

Siano eguali le superficie *curve* dei due cilindri AE, CF (*Fig.* 11), ma l'altezza di questo CD maggiore dell' altezza dell'altro AB. Dico, il cilindro AE al cilindro CF aver la medesima proporzione che l'altezza CD alla AB. Perchè dunque la superficie CF è eguale alla superficie AE, sarà il cilindro CF minore dell' AE, perchè se gli fusse eguale, la sua superficie, per la passata proposizione, sarebbe maggiore della superficie AE, e molto più se il medesimo cilindro CF fusse maggiore dell'AE. Intendasi il cilindro ID eguale all' AE; adunque, per la precedente, la superficie del cilindro ID alla superficie dell' AE starà come l' altezza IF alla media tra IF e AB. Ma essendo, pel dato, la superficie AE eguale alla CF, ed avendo la superficie ID alla GF la medesima proporzione che l' altezza IF alla CD, adunque la CD è media tra le IF e AB. In oltre essendo il cilindro ID eguale al cilindro AE, avranno amendue

la medesima proporzione al cilindro CF; ma l'ID al CF sta come l'altezza IF alla CD, adunque il cilindro AE al cilindro CF avrà la medesima proporzione che la linea IF alla CD, cioè che la CD alla AB, che è l'intento.

Di qui s'intende la ragione di un accidente, che non senza maraviglia vien sentito dal popolo; ed è, come possa essere che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso che per l'altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come costumano fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela, e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito. Come se, v. g., la tela per un verso fusse sei braccia e per l'altro dodici, più terrà quando con la lunghezza di dodici si circonda la tavola del fondo, restando il sacco alto braccia sei, che se si circondasse un fondo *di giro* di sei braccia avendone dodici per altezza. Ora, da quello che si è dimostrato, alla generica notizia del capir più per quel verso che per questo, si aggiugne la specifica e particolare scienza del quanto ei contenga più, che è, che tanto più terrà quanto sarà più basso, e tanto meno quanto più alto, *ovvero terrà tanto più quanto più sarà grosso di diametro;* e così nelle misure assegnate essendo la tela il doppio più lunga che larga, cucita per la lunghezza terrà la metà manco che per l'altro verso. E parimente avendo una stuoja per fare una bugnola, lunga venticinque braccia e larga, v. g., sette, piegata per lo lungo terrà solamente sette misure di quelle, che per l'altro verso ne terrebbe venticinque.

Sagr. E così con nostro gusto particolare andiamo continuamente acquistando nuove cognizioni curiose e non ignude di utilità. Ma nel proposito toccato adesso veramente non credo che tra quelli che mancano di qualche cognizione di geometria se ne trovassero quattro per cento che non restassero a prima giunta ingannati, che quei corpi, che da superficie eguali son contenuti, non fussero ancora in tutto eguali; sì come nell'istesso errore incorrono parlando delle superficie, che per determinare, come spesse volte accade, delle grandezze di diverse città, intera cognizione gli par d'averne,

qualunque volta sanno la quantità dei recinti di quelle, ignorando che può essere un recinto eguale d'un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello; il che accade non solamente tra le superficie irregolari, ma tra le regolari, tra le quali quelle di più lati son sempre più capaci di quelle di manco lati; sì che in ultimo il cerchio, come poligono di lati infiniti, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di egual circuito; di che mi ricordo averne con gusto particolare veduta la dimostrazione studiando la Sfera del Sacrobosco con un dottissimo comentario sopra.

Salv. È verissimo, ed avendo io ancora incontrato cotesto luogo, mi dette occasione di ritrovare, come con una sola e breve dimostrazione si concluda il cerchio esser maggiore di tutte le figure regolari isoperimetre; e dell'altre, quelle di più lati esser maggiori di quelle di manco.

Sagr. Ed io, che sento tanto diletto in certe proposizioni e dimostrazioni scelte e non triviali, importunandovi vi prego che me ne facciate partecipe.

Salv. In brevi parole vi spedisco, dimostrando il seguente teorema, cioè:

Il cerchio è medio proporzionale tra qualsivogliano due poligoni regolari tra di loro simili, dei quali uno gli sia circonscritto, e l'altro gli sia isoperimetro. In oltre, essendo egli minore di tutti i circonscritti, è all'incontro massimo di tutti gl' isoperimetri. Dei medesimi poi circonscritti quelli che hanno più angoli son minori di quelli che ne hanno manco, ma all'incontro degl' isoperimetri quelli di più angoli son maggiori.

Delli due poligoni simili A, B (*Fig.* 12) sia l'A circonscritto al cerchio A, e l'altro B ad esso cerchio sia isoperimetro. Dico il cerchio esser medio proporzionale tra essi. Imperocchè (tirato il semidiametro AC) essendo il cerchio eguale a quel triangolo rettangolo, dei lati del quale, che sono intorno all'angolo retto, uno sia eguale al semidiametro AC, e l' altro alla circonferenza; e similmente essendo il poligono A eguale al triangolo rettangolo, che intorno all' angolo retto ha uno dei

lati eguale alla medesima retta AC, e l'altro al perimetro del medesimo poligono, è manifesto il circonscritto poligono aver al cerchio la medesima proporzione che ha il suo perimetro alla circonferenza di esso cerchio, cioè al perimetro del poligono B, che alla circonferenza detta si pone eguale: ma il poligono A al B ha doppia proporzione che il suo perimetro al perimetro di B (essendo figure simili), adunque il cerchio A è medio proporzionale tra i due poligoni A, B; ed essendo il poligono A maggior del cerchio A, è manifesto esso cerchio A esser maggior del poligono B suo isoperimetro, ed in conseguenza massimo di tutti i poligoni regolari suoi isoperimetri.

Quanto all'altra parte, cioè di provare che dei poligoni circonscritti al medesimo cerchio, quello di manco lati sia maggior di quello di più lati; ma che all'incontro, dei poligoni isoperimetri quello di più lati sia maggiore di quello di manco lati, dimostreremo così. Nel cerchio, il cui centro O semidiametro OA, sia la tangente AD, ed in essa pongasi, per esempio, AD esser la metà del lato del pentagono circonscritto, ed AC metà del lato dell'ettagono, e tirinsi le rette OGC, OFD, e centro O, intervallo OC, descrivasi l'arco ECI. E perchè il triangolo DOC è maggiore del settore EOC, e il settore COI maggiore del triangolo COA, maggior proporzione avrà il triangolo DOC al triangolo COA, che il settore EOC al settore COI, cioè che il settore FOG al settore GOA; e componendo e permutando, il triangolo DOA al settore FOA avrà maggior proporzione che il triangolo COA al settore GOA, e dieci triangoli DOA a dieci settori FOA avranno maggior proporzione che quattordici triangoli COA a quattordici settori GOA, cioè il pentagono circonscritto avrà maggior proporzione al cerchio che non gli ha l'ettagono; e però il pentagono sarà maggiore dell'ettagono. Intendasi ora un ettagono ed un pentagono isoperimetri al medesimo cerchio. Dico l'ettagono esser maggiore del pentagono. Imperocchè essendo l'istesso cerchio medio proporzionale tra il pentagono circonscritto e il pentagono suo isoperimetro, e parimente medio tra il circonscritto e l'isoperimetro ettagono; essendosi provato il circonscritto pentagono esser maggiore del circon-

scritto ettagono, avrà esso pentagono maggior proporzione al cerchio che l'ettagono; cioè il cerchio avrà maggior proporzione al suo isoperimetro pentagono che all' isoperimetro ettagono; adunque il pentagono è minore dell' isoperimetro ettagono; che si doveva dimostrare.

Sagr. Gentilissima dimostrazione e molto acuta, *e che ritiene una quasi contraddizione del primo aspetto, poichè la cagione dell' essere il poligono di più lati maggiore del suo isoperimetro di manco lati, proviene dall' essere il circonscritto di più lati minore del circoscritto di manco lati* (1). Ma dove siamo trascorsi a ingolfarci nella geometria? mentre eramo sul considerare le difficoltà promosse dal Sig. Simplicio, che veramente son di gran considerazione, ed in particolare quella della condensazione mi par durissima.

Sagr. Se la condensazione e la rarefazione son moti opposti, dove si veda un' immensa rarefazione non si potrà negare una non men grandissima condensazione; ma rarefazioni immense, e quel che accresce la maraviglia, quasi che momentanee, le vediamo noi tutto il giorno. E quale sterminata rarefazione non è quella di una poca quantità di polvere d'artiglieria risoluta in una mole vastissima di fuoco? e quale, oltre a questa, l'espansione, direi quasi senza termine, della sua luce? E se quel fuoco e questo lume si riunissero insieme, che pur non è impossibile, poichè dianzi stettero dentro quel piccolo spazio, qual condensamento non sarebbe questo? Voi discorrendo troverete mille di tali rarefazioni, che sono molto più in pronto ad esser osservate che le condensazioni, perchè le materie dense son più trattabili e sottoposte ai nostri sensi, che ben maneggiamo le legne, e le vediamo risolvere in fuoco e in luce, ma non così vediamo il fuoco e il lume condensarsi a costituire il legno; vediamo i frutti, i fiori e mille altre solide materie risolversi in gran parte in odori, ma non così osserviamo gli atomi odorosi concorrere alla costituzione dei solidi odorati. Ma dove manca la sen-

(1) Questa è una delle aggiunte dettate da Galileo stesso al Padre Clemente (Famiano Michelini) delle Scuole Pie.

sata osservazione si deve supplir col discorso, che basterà per farci capaci non men del moto alla rarefazione e resoluzione dei solidi, che alla condensazione delle sostanze tenui e rarissime. In oltre noi trattiamo come si possa far la condensazione e rarefazione dei corpi, che si possono rarefare e condensare, speculando in qual maniera ciò possa esser fatto senza l'introduzion del vacuo e della penetrazione dei corpi; il che non esclude che in natura possano esser materie che non ammettono tali accidenti, ed in conseguenza non danno luogo a quelli che voi chiamate inconvenienti e impossibili. E finalmente, Sig. Simplicio, io, in grazia di voi altri Signori Filosofi, mi sono affaticato in speculare come si possa intendere farsi la condensazione e la rarefazione senza ammettere la penetrazione dei corpi e l'introduzione degli spazi vacui, effetti da voi negati ed abborriti; che quando voi li voleste concedere, io non vi sarei così duro contraddittore. Però, o ammettete questi inconvenienti, o gradite le mie speculazioni, o trovatene di più aggiustate.

Sagr. Alla negativa della penetrazione son io del tutto con i filosofi peripatetici. A quella del vacuo vorrei sentir ben ponderare la dimostrazione d'Aristotile, con la quale ei l'impugna, e quello che voi, Sig. Salviati, gli opponete. Il Sig. Simplicio mi farà grazia di arrecar puntualmente la prova del Filosofo, e voi, Sig. Salviati, la risposta.

Simp. Aristotile, per quanto mi sovviene, insurge contro alcuni antichi, i quali introducevano il vacuo come necessario pel moto, dicendo che questo senza quello non si potrebbe fare. A questo contrapponendosi Aristotile, dimostra che all'opposito il farsi (come vogliamo) il moto distrugge la posizione del vacuo; e il suo progresso è tale. Fa due supposizioni: l'una è di mobili diversi in gravità mossi nel medesimo mezzo: l'altra è dell'istesso mobile mosso in diversi mezzi. Quanto al primo, suppone che mobili diversi in gravità si muovano nell'istesso mezzo con diseguali velocità, le quali mantengano tra di loro la medesima proporzione che le gravità; sì che, per esempio, un mobile dieci volte più grave d'un altro si muova dieci volte più velocemente. Nell'altra

posizione piglia che le velocità del medesimo mobile in diversi mezzi ritengano tra di loro la proporzione contraria di quella che hanno le grossezze o densità di essi mezzi; talmente che, posto, v. g., che la crassizie dell' acqua fusse dieci volte maggiore di quella dell' aria, vuole che la velocità nell' aria sia dieci volte più che la velocità nell' acqua. E da questo secondo supposto trae la dimostrazione in cotal forma: Perchè la tenuità del vacuo supera d' infinito intervallo la corpulenza benchè sottilissima di qualsivoglia mezzo pieno, ogni mobile, che nel mezzo pieno si movesse per qualche spazio in qualche tempo, nel vacuo dovrebbe muoversi in uno istante; ma farsi moto in uno istante è impossibile; adunque darsi il vacuo in grazia del moto è impossibile.

Salv. L' argomento si vede che è *ad hominem*, cioè contro a quelli che volevano il vacuo come necessario pel moto. Che se io concederò l' argomento come concludente, concedendo insieme che nel vacuo non si farebbe il moto, la posizion del vacuo, assolutamente presa e non in relazione al moto, non vien distrutta. Ma per dir quel che per avventura potrebber rispondere quegli antichi, acciò meglio si scorga quanto concluda la dimostrazione di Aristotile, mi par che si potrebbe andar contro agli assunti di quello negandoli amendue. E quanto al primo: io grandemente dubito che Aristotile non sperimentasse mai quanto sia vero che due pietre, una più grave dell' altra dieci volte, lasciate nel medesimo istante cader da un' altezza, v. g, di cento braccia, fusser talmente differenti nelle loro velocità, che all' arrivo della maggior in terra, l' altra si trovasse non avere nè anco sceso dieci braccia.

Simp. Si vede pure dalle sue parole ch' ei mostra di averlo sperimentato, perchè ei dice: Vediamo il più grave; or quel = vedersi = accenna l' averne fatta l' esperienza.

Sagr. Ma io, Sig. Simplicio, che ne ho fatto la prova, vi assicuro che una palla di artiglieria, che pesi cento, dugento ed anco più libbre, non anticiperà di un palmo solamente l' arrivo in terra della palla di un moschetto, che ne pesi una mezza, venendo anco dall' altezza di dugento braccia.

Salv. Ma senz' altre esperienze con breve e concludente dimostrazione possiamo chiaramente provare non esser vero che un mobile più grave si muova più velocemente di un altro men grave, intendendo di mobili dell' istessa materia; ed in somma di questi dei quali parla Aristotile. Però ditemi, Sig. Simplicio, se voi ammettete che di ciaschedun corpo grave cadente sia una da natura determinata velocità, sì che l' accrescergliela o diminuirgliela non si possa se non con usargli violenza o opporgli qualche impedimento.

Simp. Non si può dubitare che l' istesso mobile nell' istesso mezzo abbia una statuita e da natura determinata velocità, la quale non se gli possa accrescere se non con nuovo impeto conferitogli, o diminuirgliela salvo che con qualche impedimento che lo ritardi.

Salv. Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità dei quali fussero ineguali, è manifesto che se noi congiugnessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velocitato dall' altro più veloce. Non concorrete voi meco in questa opinione?

Simp. Parmi che così debba indubitabilmente seguire.

Salv. Ma se questo è, ed è insieme vero che una pietra grande si muove, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque congiungendole amendue insieme, il composto di loro si muoverà con velocità minore di otto gradi; ma le due pietre congiunte insieme fanno una pietra maggiore che quella prima, che si muoveva con otto gradi di velocità; *adunque questo composto (che pure è maggiore che quella prima sola) si muoverà più tardamente che la prima sola* (1), che è contro alla vostra supposizione. Vedete dunque come dal supporre che il mobile più grave si muova più velocemente del men grave, io vi concludo il più grave muoversi men velocemente.

Simp. Io mi trovo avviluppato, perchè mi par pure che la pietra minore aggiunta alla maggiore le aggiunga peso,

(1) Variante di Galileo stesso alle parole: *adunque questa maggiore si muove men velocemente che la minore.*

e aggiugnendole peso non so come non debba aggiugnerle velocità, o almeno non diminuirgliela.

SALV. Qui commettete un altro errore, Sig. Simplicio, perchè non è vero che quella minor pietra accresca peso alla maggiore.

SIMP. Oh! questo passa bene ogni mio concetto.

SALV. Non lo passerà altrimenti, fatto che io vi abbia accorto dell'equivoco nel quale voi andate fluttuando: però avvertite, che bisogna distinguere i gravi posti in moto dai medesimi costituiti in quiete. Una pietra messa nella bilancia non solamente acquista peso maggiore col soprapporgli una altra pietra, ma anco la giunta di un pennecchio di stoppa la farà pesar più quelle sei o dieci once che peserà la stoppa; ma se voi lascerete liberamente cader da un'altezza la pietra legata con la stoppa, credete voi che nel moto la stoppa graviti sopra la pietra, onde gli debba accelerar il suo moto, o pur credete ch'ella la ritarderà sostenendola in parte? Sentiamo gravitarci sulle spalle, mentre vogliamo opporci al moto che farebbe, quel peso che ci sta addosso; ma se noi scendessimo con quella velocità che quel tal grave naturalmente scenderebbe, in che modo volete che ci prema e graviti sopra? Non vedete che questo sarebbe un voler ferire con la lancia colui, che vi corre innanzi con tanta velocità con quanta o con maggiore di quella con la quale voi lo seguite? Concludete pertanto che nella libera e naturale caduta la minor pietra non gravita sopra la maggiore, ed in conseguenza non le accresce peso, come fa nella quiete.

SIMP. Ma chi posasse la maggiore sopra la minore?

SALV. Le accrescerebbe peso, quando il suo moto fusse più veloce; ma già si è concluso che quando la minore fusse più tarda, ritarderebbe in parte la velocità della maggiore, tal che il lor composto si muoverebbe men veloce, essendo maggiore dell'altra; che è contro al vostro assunto. Concludiamo perciò, che i mobili grandi, e i piccoli ancora, essendo della medesima gravità in ispecie, si muovono con pari velocità.

SIMP. Il vostro discorso procede benissimo veramente: tut-

tavia mi par duro a credere che una lagrima di piombo si abbia a muovere così veloce come una palla di artiglieria.

Salv. Voi dovevate dire un grano di rena, come una macina da guado. Io non vorrei, Sig. Simplicio, che voi faceste come alcuni fanno, che divertendo il discorso dal principale intento vi attaccaste a un mio detto, che mancasse dal vero quanto è un capello, e che sotto questo capello voleste nasconder un difetto di un altro grosso quanto una gomena da nave. Aristotile dice: una palla di ferro di cento libbre cadendo dall' altezza di cento braccia arriva in terra prima che una di una libbra sia scesa un sol braccio. Io dico che elle arrivano nell' istesso tempo. Voi trovate che la maggiore anticipa di due dita la minore, cioè che quando la grande percuote in terra, l' altra ne è lontana due dita; e ora vorreste, dopo queste due dita, appiattare le novantanove braccia di Aristotile, e parlando solo del mio minimo errore, metter sotto silenzio l' altro massimo. Aristotile pronunzia che mobili di diversa gravità nel medesimo mezzo si muovono (per quanto dipende dalla gravità) con velocitadi proporzionate ai pesi loro, e l' esemplifica con mobili, nei quali si possa scorgere il puro ed assoluto effetto del peso, lasciando l' altre considerazioni sì delle figure come dei minimi momenti, le quali cose grande alterazione ricevono dal mezzo che altera il semplice effetto della sola gravità: che perciò si vede l' oro, gravissimo sopra tutte l' altre materie, ridotto in una sottilissima foglia andar vagando per aria; e l' istesso fanno i sassi pestati in sottilissima polvere. Ma se voi volete mantenere la proposizione universale, bisogna che voi mostriate, la proporzione delle velocità osservarsi in tutti i gravi, e che un sasso di venti libbre si muova dieci volte più veloce che uno di due; il che vi dico esser falso, e che cadendo dall' altezza di cinquanta e cento braccia arrivano in terra nell' istesso momento.

Simp. Forse da grandissime altezze di migliaja di braccia seguirebbe quello che in queste altezze minori non si vede accadere.

Salv. Se Aristotile avesse inteso questo, voi gli addos-

sereste un altro errore, che sarebbe una bugia; perchè non si trovando in terra tali altezze perpendicolari, chiara cosa è che Aristotile non ne poteva aver fatta esperienza; e pur ci vuol persuadere di averla fatta, mentre dice che tale effetto si vede.

SIMP. Aristotile veramente non si serve di questo principio, ma di quell' altro, che non credo che patisca queste difficoltà.

SALV. E l' altro ancora non è men falso di questo; e mi maraviglio che per voi stesso non penetriate la fallacia, e che non vi accorgiate che quando fusse vero che l' istesso mobile in mezzi di differente sottilità e rarità, ed insomma di diversa cedenza, quali, per esempio, son l' acqua e l'aria, si muovesse con velocità nell' aria maggiore che nell' acqua, secondo la proporzione della rarità dell' aria a quella dell'acqua, ne seguirebbe che ogni mobile che scendesse per aria, scenderebbe anco nell' acqua; il che è tanto falso quanto che moltissimi corpi scendono nell' aria, che nell' acqua non pur non discendono, ma sormontano all' insù.

SIMP. Io non intendo la necessità della vostra conseguenza; e più dirò che Aristotile parla di quei mobili gravi, che discendono nell' un mezzo e nell' altro, e non di quelli che scendono nell' aria, e nell'acqua vanno all' insù.

SALV. Voi arrecate pel filosofo di quelle difese che egli assolutamente non produrrebbe per non aggravare il primo errore. Però ditemi se la corpulenza dell'acqua, o quel che si sia che ritarda il moto, ha qualche proporzione alla corpulenza dell' aria che meno lo ritarda; e avendola, assegnatela a vostro beneplacito.

SIMP. Halla, e ponghiamo ch' ella sia proporzione decupla; e che però la velocità di un grave, che discenda in amendue gli elementi, sarà dieci volte più tardo nell' acqua che nell' aria.

SALV. Piglio adesso uno di quei gravi che vanno in giù nell'aria, ma nell' acqua no, qual sarebbe una palla di legno, e vi domando che voi gli assegniate qual velocità più vi piace, mentre scende per aria.

Simp. Ponghiamo che ella si muova con venti gradi di velocità.

Salv. Benissimo. Ed è manifesto che tal velocità a qualche altra minore può aver la medesima proporzione che la corpulenza dell' acqua a quella dell' aria, e che questa sarà la velocità di due soli gradi; tal che veramente a filo e a dirittura, conforme all'assunto d'Aristotile, si dovrebbe concludere che la palla di legno, che nell'aria, dieci volte più cedente dell' acqua, si muove scendendo con venti gradi di velocità, nell' acqua dovrebbe scendere con due, e non venire a galla dal fondo come fa; se già voi non voleste dire che nell' acqua il venire ad alto del legno sia l' istesso che il calare a basso con due gradi di velocità; il che non credo. Ma già che la palla del legno non cala al fondo, credo pure che mi concederete che qualche altra palla d'altra materia diversa dal legno si potrebbe trovare, che nell' acqua scendesse con due gradi di velocità.

Simp. Potrebbesi senza dubbio, ma di materia notabilmente più grave *in specie* del legno.

Salv. Questo è quel ch' io vo cercando. Ma questa seconda palla, che nell' acqua discende con due gradi di velocità, con quanta velocità discenderà nell' aria? Bisogna (se volete servar la regola d'Aristotile) che rispondiate che si muoverà con venti gradi: ma venti gradi di velocità avete voi medesimo assegnati alla palla di legno: adunque questa e l' altra assai più grave si muoveranno per l'aria con egual velocità. Or come accorda il filosofo questa conclusione con l' altra sua, che i mobili di diversa gravità nel medesimo mezzo si muovono con diverse velocità, e diverse tanto quanto le gravità loro? Ma senza molto profonde contemplazioni, come avete voi fatto a non osservar accidenti frequentissimi e palpabilissimi, e non badare a due corpi, che nell' acqua si muoveranno l' uno cento volte più velocemente dell' altro, ma che nell'aria poi quel più veloce non supererà l' altro di un sol centesimo? come, per esempio, un uovo di marmo scenderà nell' acqua cento volte più presto che alcuno di gallina, che per l' aria nell' altezza di venti

braccia non l'anticiperà di quattro dita; ed in somma tal grave andrà al fondo in tre ore in dieci braccia d'acqua, che in aria le passerà in una battuta o due di polso. *Dalla quale esperienza seguirebbe che la densità dell'acqua superasse a più di mille doppi quella dell'aria; e all'incontro un altro corpo (qual sarebbe una palla di piombo) passerà nell'acqua le medesime dieci braccia in tempo per avventura poco più che doppio del tempo nel quale passerà altrettanto spazio per l'aria: talchè da questa seconda esperienza si dovrebbe concludere che la densità dell'acqua fusse poco più che doppia di quella dell'aria* (1). E qui so ben, Sig. Simplicio, che voi comprendete che non ci ha luogo distinzione o risposta veruna. Concludiamo pertanto che tale argomento non conclude nulla contro al vacuo; e quando concludesse, distruggerebbe solamente gli spazi notabilmente grandi, quali nè io, nè credo che quelli antichi supponessero naturalmente darsi, sebben forse con violenza si possan fare, come par che da varie esperienze si raccolga, le quali troppo lungo sarebbe il volere al presente arrecare.

SAGR. Vedendo che il Signor Simplicio tace, piglierò io campo di dire alcuna cosa. Già che assai apertamente avete dimostrato come non è altrimenti vero che mobili disegualmente gravi si muovono nel medesimo mezzo con velocità proporzionate alle gravità loro, ma con eguale; intendendo dei gravi dell'istessa materia, ovvero dell'istessa gravità in ispecie, ma non già (come credo) di gravità differenti in ispecie (perchè non penso che voi intendiate di concluderci che una palla di sughero si muova con pari velocità che una di piombo); ed avendo di più dimostrato molto chiaramente come non è vero che il medesimo mobile in mezzi di diverse resistenze ritenga nelle velocità e tardità sue la medesima proporzione che le resistenze; a me sarebbe cosa gratissima il sentire, quali siano le proporzioni che nell'un caso e nell'altro osservate.

(1) Variante di Galileo in luogo delle parole: *e tale (come sarebbe una palla di piombo) le passerà in tempo facilmente men che doppio.*

Salv. I quesiti son belli, ed io ci ho molte volte pensato; vi dirò il discorso fattoci attorno e quello che ne ho in ultimo ritratto. Dopo essermi certificato, non esser vero che il medesimo mobile in mezzi di diversa resistenza osservi nella velocità la proporzione delle cedenze di essi mezzi; nè meno che nel medesimo mezzo mobili di diversa gravità ritengano nelle velocità loro la proporzione di esse gravità (intendendo anco delle gravità diverse in ispecie), cominciai a comporre insieme amendue questi accidenti, avvertendo quello che accadesse dei mobili differenti di gravità posti in mezzi di diverse resistenze, e m'accorsi le disegualità delle velocità trovarsi tuttavia maggiori nei mezzi più resistenti che nei più cedenti, e ciò con diversità tali, che di due mobili, che scendendo per aria pochissimo differiranno in velocità di moto, nell'acqua l'uno si muoverà dieci volte più veloce dell'altro; anzi che tale, che nell'aria velocemente discende, nell'acqua non solo non iscenderà, ma resterà del tutto privo di moto, e quel che è più, si muoverà all'insù: perchè si potrà tal volta trovare qualche sorte di legno o qualche nodo o radica di quello che nell'acqua potrà stare in quiete, e nell'aria velocemente discenderà.

Sagr. Io più volte mi son messo con una estrema flemma per vedere di ridurre una palla di cera, che per sè stessa non va a fondo, con l'aggiugnerle grani di rena, a segno tale di gravità simile all'acqua, che nel mezzo di quella si fermasse; nè mai per diligenza usata mi successe il poterlo conseguire; onde non so se altra materia solida si ritrovi tanto naturalmente simile in gravità all'acqua, che posta in essa in ogni luogo potesse fermarsi.

Salv. Sono in questo, come in mille altre operazioni, assai più diligenti molti animali, che non siamo noi altri. E nel vostro caso i pesci vi avrebber potuto porger qualche documento, essendo in questo esercizio così dotti, che ad arbitrio loro si equilibrano non solo con un'acqua, ma con differenti notabilmente o per propria natura o per una sopravvenente torbida, o per salsedine, che fa differenza assai grande; si equilibrano, dico, tanto esattamente, che senza punto muo-

versi restano in quiete in ogni luogo; e ciò, per mio credere, fanno eglino servendosi dello strumento datogli dalla natura a cotal fine, cioè di quella vescichetta che hanno in corpo, la quale per uno assai angusto meato risponde alla lor bocca, e per quello a posta loro o mandano fuori parte dell'aria che in dette vesciche si contiene, o venendo col nuoto a galla, altra ne attraggono, rendendosi con tale arte or più or meno gravi dell'acqua, ed a lor beneplacito equilibrandosegli.

Sagr. Io con un altro artifizio ingannai alcuni amici, appresso i quali mi era vantato di ridurre quella palla di cera al giusto equilibrio con l'acqua, ed avendo messo nel fondo del vaso una parte d'acqua salata, e sopra quella della dolce, mostrai loro la palla, che a mezz'acqua si fermava, e spinta nel fondo o sospinta ad alto nè in questo nè in quel sito restava, ma ritornava nel mezzo.

Salv. Non è cotesta esperienza priva di utilità: perchè trattandosi dai medici in particolare delle diverse qualità di acque, e tra l'altre principalmente della leggerezza o gravità più di questa che di quella, con una simil palla aggiustata sì che resti ambigua, per così dire, tra lo scendere e il salire in un'acqua, per minima che sia la differenza di peso tra due acque, se in una tal palla scenderà, nell'altra, che sia più grave, salirà. Ed è talmente esatta cotale esperienza, che la giunta di due grani di sale solamente, che si mettano in sei libbre d'acqua, farà salire dal fondo alla superficie quella palla che vi era pur allora scesa. E più vi voglio dire in confermazione dell'esattezza di questa esperienza, ed insieme per chiara prova della nulla resistenza dell'acqua all'esser divisa, che non solamente l'ingravirla con la mistione di qualche materia più grave di lei induce tanto notabil differenza, ma il riscaldarla o raffreddarla un poco produce il medesimo effetto, e con sì sottile operazione, che l'infonder quattro gocciole d'altra acqua un poco più calda o un poco più fredda delle sei libbre, farà che la palla vi scenda o vi sormonti: vi scenderà infondendovi la calda, e monterà per l'infusione della fredda. Or vedete quanto s'in-

gannino quei filosofi, che voglion metter nell' acqua viscosità o altra congiunzione di parti, che la facciano resistente alla divisione o penetrazione.

SAGR. Vidi molto concludenti discorsi intorno a questo argomento in un trattato del nostro Accademico: tuttavia mi resta un gagliardo scrupolo, il quale non so rimuovere; perchè se nulla di tenacità e coerenza risiede tra le parti dell'acqua, come possono sostenersene assai grandi globi e molto rivelati, in particolare sopra le foglie dei cavoli, senza spargersi e spianarsi?

SALV. Ancor che vero sia che colui che ha dalla sua la conclusione vera possa risolvere tutte l' istanze che vengono opposte in contrario, non però mi arrogherei io il poter ciò fare, nè la mia impotenza deve denigrare la candidezza della verità. Io primieramente vi confesso che non so come vada il negozio del sostenersi quei globi d' acqua assai rilevati e grandi, sebbene io so di certo che da tenacità interna che sia tra le sue parti ciò non deriva; onde resta necessario che la cagione di cotal effetto risegga fuori. Che ella non sia interna, oltre all'esperienze mostrate ve lo posso confermare con un' altra efficacissima. Se le parti di quell' acqua, che rilevata si sostiene mentre è circondata dall' aria, avessero cagione interna per ciò fare, molto più si sosterrebbono circondate che fussero da un mezzo, nel quale avessero minor propensione di discendere che nell'aria ambiente non hanno: ma un mezzo tale sarebbe ogni fluido più grave dell' aria, v. g., il vino; e però infondendo intorno a quel globo d'acqua del vino, se gli potrebbe alzare intorno intorno, senza che le parti dell'acqua, conglutinate dall' interna viscosità, si dissolvessero; ma ciò non accade egli, anzi non prima se gli accosterà il liquore sparsogli intorno, che senza aspettar che molto se gli elevi intorno si dissolverà e spianerà restandogli di sotto, se sarà vino rosso; è dunque esterna, e forse dell' aria ambiente, la cagione di tale effetto. E veramente si osserva una gran dissensione tra l' aria e l' acqua, la quale ho io in un' altra esperienza osservata; e questa è: S' io empio d' acqua una palla di cristallo, che abbia un foro angu-

sto quant'è la grossezza d'un fil di paglia, e così piena la volto con la bocca all' ingiù, non però l'acqua benchè gravissima e pronta a scender per aria, nè l' aria altrettanto disposta a salire, come leggerissima, per l'acqua, si accordano quella a scendere uscendo pel foro, e questa a salire entrandovi, ma restano amendue ritrose e contumaci. All' incontro poi se io presenterò a quel foro un vaso con del vino rosso, che quasi insensibilmente è men grave dell' acqua, lo vedremo subito con tratti rosseggianti lentamente ascendere per mezzo l'acqua, e l' acqua con pari tardità scender pel vino senza punto mescolarsi, fin che finalmente la palla si empirà tutta di vino e l' acqua calerà tutta nel fondo del vaso di sotto. Or che si dee qui dire o che argumentarne, fuor che una disconvenienza tra l'acqua e l'aria occulta a me, ma forse. . . .

Simp. Mi vien quasi da ridere nel veder la grande antipatia che ha il Sig. Salviati con l' antipatia, che nè pur vuol nominarla, e pur è tanto accomodata a scior la difficoltà.

Salv. Or sia questa, in grazia del Sig. Simplicio, la soluzione del nostro dubbio; e lasciato il digredire torniamo al nostro proposito. Veduto come la differenza di velocità nei mobili di gravità diverse si trova esser sommamente maggiore nei mezzi più e più resistenti; ma che più, nel mezzo dell' argento vivo l' oro non solamente va in fondo più velocemente del piombo, ma esso solo vi discende, e gli altri metalli e pietre tutti vi si muovono in su e vi galleggiano, dove che tra palle d'oro, di piombo, di rame, di porfido o di altre materie gravi, quasi del tutto insensibile sarà la disegualità del moto per aria, che sicuramente una palla d' oro nel fine della scesa di cento braccia non preverrà una di rame di quattro dita; veduto, dico, questo, cascai in opinione che se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie discenderebbero con eguali velocità.

Simp. Gran detto è questo, Sig. Salviati. Io non crederò mai che nell' istesso vacuo, se pur vi si desse il moto, un fiocco di lana si movesse così veloce come un pezzo di piombo.

Salv. Piano piano, Sig. Simplicio: la vostra difficoltà non è tanto recondita, nè io così inavveduto che si debba credere

che non mi sia sovvenuta, e che in conseguenza io non vi abbia trovato ripiego. Però, per mia dichiarazione e vostra intelligenza, sentite il mio discorso. Noi siamo sul volere investigare quello che accaderebbe ai mobili differentissimi di peso in un mezzo, dove la resistenza sua fusse nulla, sì che tutta la differenza di velocità, che tra essi mobili si ritrovasse, riferir si dovesse alla sola disuguaglianza di peso. E perchè solo uno spazio del tutto vuoto di aria e di ogni altro corpo, ancor che tenue e cedente, sarebbe atto a sensatamente mostrarci quello che ricerchiamo, giacchè manchiamo di cotale spazio, andremo osservando ciò che accaggia nei mezzi più sottili e meno resistenti in comparazione di quello che si vede accadere negli altri manco sottili e più resistenti. Che se noi troveremo in fatto i mobili differenti di gravità meno e meno differir di velocità, secondo che i mezzi più e più cedenti si troveranno; e che finalmente, ancorchè estremamente diseguali di peso, nel mezzo più di ogni altro tenue, se ben non vuoto, piccolissima si scorga e quasi inosservabile la diversità della velocità, parmi che ben potremo con molto probabil conghiettura credere che nel vacuo sarebbero le velocità loro del tutto eguali. Pertanto consideriamo ciò che accade nell'aria; dove per avere una figura di superficie ben terminata e di materia leggerissima, voglio che pigliamo una vescica gonfiata, nella quale l'aria che vi sarà dentro peserà nel mezzo dell'aria stessa niente o poco, perchè poco vi si potrà comprimere, talchè la gravità è solo quella poca della stessa pellicola, che non sarebbe la millesima parte del peso di una mole di piombo grande quanto la medesima vescica gonfiata. Queste, Sig. Simplicio, lasciate dall'altezza di quattro o sei braccia, di quanto spazio stimereste che il piombo fusse per anticipare la vescica nella sua scesa? siate sicuro che non l'anticiperebbe del triplo nè anco del doppio, se ben già l'aveste fatto mille volte più veloce.

Simp. Potrebbe esser che nel principio del moto, cioè nelle prime quattro o sei braccia, accadesse cotesto che dite: ma nel progresso ed in una lunga continuazione credo che il

piombo se la lascerebbe indietro non solamente delle dodici parti dello spazio le sei, ma anco le otto e le dieci.

Salv. Ed io ancora credo l' istesso e non dubito che in distanze grandissime potesse il piombo aver passato cento miglia di spazio *prima* che la vescica ne avesse passato un solo. Ma questo, Sig. Simplicio mio, che voi proponete come effetto contrariante alla mia proposizione, è quello che massimamente la conferma. È (torno a dire) l' intento mio dichiarare, come delle diverse velocità di mobili di differente gravità non ne sia altrimenti causa la diversa gravità, ma che ciò dipenda da accidenti esteriori ed in particolare dalla resistenza del mezzo, sì che, tolta questa, tutti i mobili si muoverebbero con i medesimi gradi di velocità. E questo deduco io principalmente da quello che ora voi stesso ammettete, e che è verissimo, cioè, che di mobili differentissimi di peso le velocità più e più differiscono, secondo che maggiori e maggiori sono gli spazj che essi van trapassando; effetto che non seguirebbe quando ei dipendesse dalle differenti gravità. Imperocchè essendo esse sempre le medesime, medesima dovrebbe mantenersi sempre la proporzione tra gli spazi passati, la qual proporzione noi vediamo andar nella continuazion del moto sempre crescendo; poichè l' un mobile gravissimo nella scesa di un braccio non anticiperà il leggerissimo della decima parte di tale spazio, ma nella caduta di dodici braccia lo preverrà della terza parte, in quella di cento lo anticiperà di $\frac{90}{100}$.

Simp. Tutto bene: ma seguitando le vostre vestigie, se la differenza di peso in mobili di diversa gravità non può cagionare la mutazion di proporzione nelle velocità loro, attesochè le gravità non si mutano, nè anco il mezzo, che sempre si suppone mantenersi l' istesso, potrà cagionare alterazione alcuna nella proporzione delle velocità.

Salv. Voi acutamente fate instanza contro al mio detto, la quale è ben necessario di risolvere. Dico pertanto che un corpo grave ha da natura intrinseco principio di muoversi verso il comun centro dei gravi, cioè del nostro globo terrestre, con muovimento continuamente accelerato, ed ac-

celerato sempre egualmente, cioè, che in tempi eguali si fanno aggiunte eguali di nuovi momenti e gradi di velocità. E questo si dee intender verificarsi tuttavolta che si rimuovessero tutti gl' impedimenti accidentari ed esterni; tra i quali uno ve ne ha che noi rimuover non possiamo, che è l' impedimento del mezzo pieno, mentre dal mobile cadente deve essere aperto e lateralmente mosso, al qual moto trasversale il mezzo, benchè fluido, cedente e quieto, si oppone con resistenza or minore ed or maggiore e maggiore, secondo che lentamente o velocemente ei deve aprirsi per dare il transito al mobile, il quale perchè, come ho detto, si va per sua natura continuamente accelerando, vien per conseguenza ad incontrar continuamente resistenza maggiore nel mezzo, e però ritardamento e diminuzione nell' acquisto di nuovi gradi di velocità; sì che finalmente la velocità perviene a tal segno, e la resistenza del mezzo a tal grandezza, che bilanciandosi fra loro levano il più accelerarsi, e riducono il mobile in un moto equabile ed uniforme, nel quale egli continua poi di mantenersi sempre. È dunque nel mezzo accrescimento di resistenza, non perchè si muti la sua essenza, ma perchè si altera la velocità con la quale ei deve aprirsi e lateralmente muoversi per cedere il passaggio al cadente, il quale va successivamente accelerandosi. Ora il vedere che la resistenza dell' aria al poco momento della vescica è grandissima, ed al gran peso del piombo è piccolissima, mi fa tener per fermo che chi la rimuovesse del tutto, con l' arrecare alla vescica grandissimo comodo, ma ben poco al piombo, le velocità loro si pareggerebbero. Posto dunque questo principio, che nel mezzo, dove, o per esser vacuo o per altro, non fusse resistenza veruna che ostasse alla velocità del moto, sì che di tutti i mobili le velocità fusser pari, potremo assai congruamente assegnar le proporzioni delle velocità di mobili simili e dissimili nell' istesso ed in diversi mezzi pieni, e però resistenti. E ciò conseguiremo col por mente quanto la gravità del mezzo detrae alla gravità del mobile, la qual gravità è lo strumento col quale il mobile si fa strada rispingendo le parti del mezzo alle bande, operazione che

non accade nel mezzo vacuo: e che però differenza nessuna si ha da attendere dalla diversa gravità. E perchè è manifesto, il mezzo detrarre alla gravità del corpo da lui contenuto quanto è il peso di altrettanta della sua materia, scemando con tal proporzione le velocità dei mobili, che nel mezzo non resistente sarebbero (come si è supposto) eguali, avremo l'intento. Come, per esempio, posto che il piombo sia diecimila volte più grave dell'aria, ma l'ebano mille volte solamente, delle velocità di queste due materie, che assolutamente prese, cioè rimossa ogni resistenza, sarebbero eguali, l'aria al piombo detrae dei diecimila gradi uno, ma all'ebano suttrae de' mille gradi uno, o vogliam dire dei diecimila dieci. Quando dunque il piombo e l'ebano scenderanno per aria da qualsivoglia altezza, la quale, rimosso il ritardamento dell'aria, avrebbon passata nell'istesso tempo, l'aria alla velocità del piombo detrarrà dei diecimila gradi uno, ma all'ebano detrae dei diecimila dieci, che è quanto a dire, che divisa quella altezza, dalla quale si partano tali mobili; in dieci mila parti, il piombo arriverà in terra restando indietro l'ebano dieci, anzi pur nove delle dette diecimila parti. E che altro è questo salvo che, cadendo una palla di piombo da una torre alta dugento braccia, trovar che ella anticiperà una d'ebano di manco di quattro dita? Pesa l'ebano mille volte più dell'aria, ma quella vescica così gonfia pesa solamente quattro volte tanto; l'aria dunque dalla intrinseca e naturale velocità dell'ebano detrae de' mille gradi uno, ma a quella, che pur della vescica assolutamente sarebbe stata l'istessa, l'aria ne toglie delle quattro parti una: allora dunque che la palla di ebano cadendo dalla torre giugnerà in terra, la vescica ne averà passati i tre quarti solamente. Il piombo è più grave dell'acqua dodici volte, ma l'avorio il doppio solamente: l'acqua dunque alle assolute velocità loro, che sarebbero eguali, toglie al piombo la duodecima parte, ma all'avorio la metà: nell'acqua dunque quando il piombo sarà sceso undici braccia, l'avorio ne avrà sceso sei. E discorrendo con tal regola, credo che troveremo l'esperienze molto più aggiustatamente risponder a cotal computo

che a quello di Aristotile. Con simil progresso troveremo la proporzione tra le velocità del medesimo mobile in diversi mezzi fluidi, paragonando non le diverse resistenze dei mezzi, ma considerando gli eccessi di gravità del mobile sopra le gravità dei mezzi; v. g., lo stagno è mille volte più grave dell' aria, e dieci più dell' acqua: adunque divisa la velocità assoluta dello stagno in mille gradi, nell' aria, che glie ne detrae la millesima parte, si muoverà con gradi novecento novantanove, ma nell' acqua con novecento solamente, essendo che l' acqua gli detrae solo la decima parte della sua gravità, e l' aria la millesima. Posto un solido poco più grave dell' acqua, qual sarebbe, v. g., il legno di rovere, una palla del quale pesando, diremo, mille dramme, altrettant'acqua ne pesasse novecento cinquanta, ma tanta aria ne pesasse due, è manifesto, che posto che la velocità sua assoluta fusse di mille gradi, in aria resterebbe di novecento novantotto, ma in acqua solamente di cinquanta, atteso che l' acqua dei mille gradi di gravità gliene toglie novecento cinquanta, e gliene lascia solamente cinquanta; tal solido dunque si muoverebbe quasi venti volte più velocemente in aria che in acqua, sì come l' eccesso della gravità sua sopra quella dell' acqua è la vigesima parte della sua propria. E qui voglio che consideriamo, che non potendo muoversi in giù nell' acqua se non materie più gravi in ispecie di lei, e per conseguenza per molte centinaia di volte più gravi dell' aria, nel ricercare qual sia la proporzione delle velocità loro in aria ed in acqua, possiamo senza notabile errore far conto che l' aria non detragga cosa di momento dalla assoluta gravità, ed in conseguenza dalla assoluta velocità di tali materie; onde speditamente trovato l' eccesso della gravità loro sopra la gravità dell' acqua, diremo la velocità loro per aria alla velocità loro per acqua aver la medesima proporzione che la loro totale gravità all' eccesso di questa sopra la gravità dell' acqua. Per esempio, una palla di avorio pesa vent' once, altrettanta acqua pesa once diciassette; adunque la velocità dell' avorio in aria alla sua velocità in acqua è prossimamente come venti a tre.

Sagr. Grandissimo acquisto ho fatto in una materia per

sè stessa curiosa e nella quale, ma senza profitto, ho molte volte affaticata la mente: nè mancherebbe altro, per potere anche praticare queste speculazioni, se non il trovar modo di poter venire in cognizione di quanta sia la gravità dell'aria rispetto all'acqua, ed in conseguenza all'altre materie gravi.

Simp. Ma quando si trovasse che l'aria invece di gravità avesse leggerezza, che si dovrebbe dire degli avuti discorsi per altro modo ingegnosi?

Salv. Converrebbe dire che fussero stati veramente aerei, leggeri e vani. Ma vorrete voi dubitare se l'aria sia grave, mentre avete il testo chiaro di Aristotile che l'afferma, dicendo che tutti gli elementi hanno gravità, anco l'aria stessa? segno di che (soggiugne egli) ne è che l'otro gonfiato pesa più che sgonfiato.

Simp. Che l'otro o pallone gonfiato pesi più, crederei io che procedesse non da gravità che sia nell'aria, ma nei molti vapori grossi tra essa mescolati in queste nostre regioni basse; mercè dei quali direi io che cresce la gravità dell'otro.

Salv. Non vorrei che lo diceste voi, e molto meno che lo faceste dire ad Aristotile, perchè parlando egli degli elementi, e volendomi persuadere che l'elemento dell'aria è grave facendomelo veder con l'esperienza; se nel venire alla prova ei mi dicesse: piglia un otro ed empilo di vapori grossi, ed osserva che il suo peso crescerà; io gli direi che più ancora peserebbe chi l'empisse di semola; ma soggiugnerei dopo, che tali esperienze provano che le semole ed i vapori grossi son gravi, ma quanto all'elemento dell'aria resterei nel medesimo dubbio di prima. L'esperienza dunque di Aristotile è buona e la proposizione vera. Ma non direi già così di certa altra ragione presa pure *a signo* di un tal filosofo, del quale non mi sovviene il nome, ma so che l'ho letta, il quale argomenta l'aria esser più grave che leggera, perchè più facilmente porta i gravi all'ingiù che i leggeri all'insù.

Sagr. Bene per mia fè. Adunque per questa ragione l'aria sarà molto più grave dell'acqua, avvegnachè tutti i gravi son portati più facilmente ingiù per aria che per acqua, e tutti i leggeri più agevolmente in questa che in quella,

anzi infinite materie salgono per acqua che per aria calano a basso. Ma sia la gravità dell'otro, Sig. Simplicio, o per i vapori grossi o per l'aria pura, questo niente osta al proposito nostro, che cerchiamo quel che accade a' mobili che si muovono in questa nostra regione vaporosa. Però, ritornando a quello che più mi preme, vorrei, per intera ed assoluta istruzione della presente materia, non solo restare assicurato che l'aria sia (come io tengo per fermo) grave, ma vorrei, se è possibile, saper quanta sia la sua gravità. Però, Signor Salviati, se avete da soddisfarmi in questo ancora, vi prego a farmene favore.

Salv. Che nell'aria risegga gravità positiva, e non altrimente, come alcuni hanno creduto, leggerezza, la quale forse in veruna materia non si ritrova, assai concludente argomento ce ne porge l'esperienza del pallone gonfiato posta da Aristotile, perchè se qualità di assoluta e positiva leggerezza fusse nell'aria, multiplicata e compressa l'aria crescerebbe la leggerezza, e in conseguenza la propensione di andare in su: ma l'esperienza mostra l'opposito. Quanto all'altra domanda, che è del modo d'investigare la sua gravità, io l'ho praticato in cotal maniera. Ho preso un fiasco di vetro assai capace e col collo strozzato, al quale ho applicato un ditale di cuoio legato bene stretto nella strozzatura del fiasco, avendo in capo al detto ditale inserta e saldamente fermata un'animella da pallone, per la quale con uno schizzatoio ho per forza fatto passar nel fiasco molta quantità di aria; della quale, perchè patisce di esser assaissimo condensata, se ne può cacciare due e tre altri fiaschi oltre a quella che naturalmente vi capisce. In una esattissima bilancia ho io poi pesato molto precisamente tal fiasco con l'aria dentrovi compressa, aggiustando il peso con minuta arena. Aperta poi l'animella e dato l'esito all'aria violentemente nel vaso contenuta, e rimessolo in bilancia, trovandolo notabilmente alleggerito, sono andato detraendo del contrappeso tanta arena, salvandola da parte, che la bilancia resti in equilibrio col residuo contrappeso, cioè col fiasco. E qui non è dubbio che il peso della rena salvata è quello dell'aria, che forzatamente

fu messa nel fiasco, e che ultimamente n'è uscita. Ma tale esperienza sin qui non mi assicura di altro se non che l'aria contenuta violentemente nel vaso pesò quanto la salvata arena; ma quanto risolutamente e determinatamente pesi l'aria rispetto all'acqua o ad altra materia grave, non per ancora so io, nè posso sapere, se io non misuro la quantità di quell'aria compressa: ed a questa investigazione bisogna trovar regola, nella quale ho trovato di potere in due maniere procedere. L'una delle quali è di pigliar un altro simil fiasco pur come il primo strozzato, alla strozzatura del quale sia strettamente legato un altro ditale, che dall'altra sua testa abbracci l'animella dell'altro, e intorno a quella con saldissimo nodo sia legato. Questo secondo fiasco convien che nel fondo sia forato *sottilmente ma* in modo che per tal foro si possa mettere un filo di ferro, col quale si possa, quando vorremo, aprir la detta animella per dar l'esito alla soverchia aria dell'altro vaso, pesata ch'ella sia: ma deve questo secondo fiasco esser pieno d'acqua *e tenuto sotto l'altro pieno di aria compressa*. Apparecchiato il tutto nella maniera detta, ed aprendo con lo stile l'animella, l'aria uscendo con impeto e passando nel vaso dell'acqua, la caccerà fuora pel foro del fondo; ed è manifesto, la quantità dell'acqua, che in tal guisa verrà cacciata, esser eguale alla mole e quantità d'aria che dall'altro vaso sarà uscita. Salvata dunque tale acqua, e tornato a pesare il vaso alleggerito dell'aria compressa (il quale suppongo che fusse pesato anche prima con detta aria sforzata), e detratto al modo già dichiarato l'arena superflua, è manifesto questa essere il giusto peso di tanta aria in mole, quanta è la mole dell'acqua scacciata e salvata; la quale peseremo e vedremo quante volte il peso suo conterrà il peso della serbata arena; e senza errore potremo affermar tante volte esser più grave l'acqua dell'aria; la quale non sarà dieci volte altrimenti, come par che stimasse Aristotile, ma ben circa quattrocento, come tale esperienza ne mostra.

L'altro modo è più spedito, e puossi fare con un vaso solo, cioè col primo accomodato nel modo detto, nel quale non voglio che mettiamo altra aria oltre a quella che naturalmente

vi si ritrova, ma voglio che vi cacciamo dell' acqua senza lasciar uscir punto di aria, la quale, dovendo cedere alla sopravvenente acqua, è forza che si comprima. Spintavi dunque più acqua che sia possibile, che pure senza molta violenza vi se ne potrà mettere i tre quarti della tenuta dal fiasco, mettasi sulla bilancia e diligentissimamente si pesi; il che fatto, tenendo il vaso col collo in su, si apra l'animella dando l' uscita all' aria, della quale ne scapperà fuora giustamente quanta è l' acqua contenuta nel fiasco. Uscita che sia l' aria, si torni a mettere il vaso in bilancia, il quale per la partita dell' aria si troverà alleggerito; e detratto dal contrappeso il peso superfluo, da esso avremo la gravità di tanta aria, quanta è l' acqua del fiasco.

Simp. Gli artifizi ritrovati da voi non si può dire che non siano sottili e molto ingegnosi: ma mentre mi pare che in apparenza dieno intera soddisfazione all' intelletto, mi mettono per un altro verso in confusione. Imperocchè essendo indubitabilmente vero che gli elementi nelle proprie regioni non sono nè leggieri nè gravi, non posso intendere come, dove quella porzione d' aria che parve pesasse, v. g., quattro dramme di rena, debba poi realmente aver tal gravità nell' aria, nella quale ben la ritiene la rena che la contrappesò; e però mi pare che l' esperienza dovesse esser praticata non nell'elemento dell'aria, ma in un mezzo dove l'aria stessa potesse esercitare il suo talento del peso, se ella veramente ne possiede.

Salv. Acuta certo è l' opposizione del Sig. Simplicio, e però è necessario o che ella sia insolubile o che la soluzione sia non men sottile. Che quell' aria, la quale compressa mostrò pesare quanto quella rena, posta in libertà nel suo elemento non sia più per pesare, ma sì ben la rena, è cosa chiarissima: e però per far tale esperienza conveniva eleggere un luogo e un mezzo, dove l' aria non men che la rena potesse gravitare; perchè, come più volte si è detto, il mezzo detrae dal peso d' ogni materia che vi s' immerge, tanto quanto è il peso d' altrettanta parte dell' istesso mezzo, quanto è la mole immersa; sì che l' aria all' aria leva tutta la gravità: l' operazione dunque, acciò fusse fatta esattamente, converrebbe

farla nel vacuo, dove ogni grave eserciterebbe il suo momento senza diminuzione alcuna. Quando dunque, Sig. Simplicio, noi pesassimo una porzione d' aria nel vacuo, resterete allora sincerato e assicurato del fatto?

Simp. Veramente sì; ma questo è un desiderare o richiedere l' impossibile.

Salv. E però grandissimo converrà che sia l' obbligo che mi dovrete qual volta per amor vostro io effettui un impossibile; ma io non voglio vendervi quel che già vi ho donato, perchè di già nell' addotta esperienza pesiamo noi l' aria nel vacuo e non nell' aria o in altro mezzo pieno. Che alla mole, Sig. Simplicio, che nel mezzo fluido s' immerge, venga dall' istesso mezzo detratto della gravità; ciò proviene perchè ei resiste all' essere aperto, discacciato e finalmente sollevato; segno di che ne dà la prontezza sua nel ricorrere subito a riempir lo spazio che l' immersa mole in lui occupava, qualunque volta essa ne parta: che quando di tale immersione ei nulla sentisse, niente opererebbe egli contro di quella. Ora ditemi, mentre che voi avete in aria il fiasco di già pieno della medesima aria naturalmente contenutavi, qual divisione, scacciamento o in somma qual mutazione riceva l' aria esterna ambiente dalla seconda aria che nuovamente s' infonde con forza nel vaso. Forse s' ingrandisce il fiasco, onde l' ambiente debba maggiormente ritirarsi per cedergli luogo? certo no; e però possiam dire che la seconda aria non s' immerge nell' ambiente, non vi occupando ella spazio, ma è come se si mettesse nel vacuo; anzi pur vi si mette ella realmente e si trappone nei vacui non ben ripieni della prima aria non condensata. E veramente non so conoscere differenza nessuna tra due costituzioni d' ambiente, mentre in questa l' ambiente niente preme l' ambito, ed in quella l' ambito punto non ispigne contro all' ambiente: e tali sono la locazione di qualche materia nel vacuo e la seconda aria compressa nel fiasco. Il peso dunque, che si trova in tal'aria condensata, è quello che ella avrebbe liberamente sparsa nel vacuo. Ben è vero che il peso della rena che la contrappesò, come quella che era nell' aria libera, nel vacuo sarebbe stato

un poco più del giusto; e però convien dire che l'aria pesata sia veramente alquanto men grave della rena che la contrappesò, cioè tanto quanto peserebbe altrettanta aria nel vacuo.

SAGR. *Acuta veramente speculazione, la quale in sè comprende la resoluzione di un problema, il quale pare aver dell'ammirando, mentre che ristretto in sustanza ed in poche parole, ci mostra il modo di trovar la quantità del peso d'un corpo pesato nel vacuo, non lo pesando noi se non nel mezzo pieno d'aria, e l'applicazione è tale. L'aria ad ogni corpo grave, che in essa è locato, detrae dalla assoluta sua gravità tanto di peso, quanto è la gravità d'altrettanta mole d'aria, quanto è la mole del medesimo corpo. Adunque chi potesse accoppiare col medesimo corpo tanta aria quanta è la sua mole, senza punto ingrandirlo, pesandolo s'avrebbe quella assoluta sua gravità che egli avrebbe nel vacuo, atteso che, senza accrescerlo di mole, se gli aggiunge il peso che dal mezzo gli veniva sottratto. Quando dunque nel fiasco già pieno d'aria naturalmente contenutavi ci s'infonde una quantità d'acqua senza lasciarne uscir niente dell'aria già contenutavi, è manifesto che quest'aria naturalmente contenutavi si ristringe e condensa in minor mole per dar luogo all'acqua infusa, ed è manifesto che la mole dell'aria che si restringe è eguale alla mole dell'acqua infusavi. Quando dunque si pesa nell'aria il vaso così accomodato, è manifesto che il peso dell'acqua viene accompagnato da altrettanta aria, del qual peso ne è parte quello dell'acqua insieme a quello di altrettanta aria, che è quel medesimo peso che l'acqua sola avrebbe nel vacuo. Quando dunque, pesato tutto il vaso, e notato da parte tutto il peso, e dando l'esito all'aria compressa, e ripesando tutto il rimanente che per l'esito dell'aria sarà diminuito di peso, presa la differenza di questi due pesi, avremo la gravità di quell'aria compressa che in mole era eguale all'acqua: pigliando poi il peso dell'acqua sola ed a quello aggiungendo questo peso che mettemmo da parte, e che era dell'aria compressa, avremo il peso della medesima acqua sola nel vacuo. Il trovar poi quanto sia il peso dell'acqua, sarà col cavare dal vaso l'acqua, e pesando il vaso solo detrar questo peso da quello*

che fu del vaso e dell' acqua pesati innanzi, che è manifesto il rimanente essere il peso dell' acqua sola in aria (1).

Simp. Pur mi pareva che nell'addotte esperienze vi fusse qualche cosa da desiderare; ma ora mi quieto interamente.

Salv. Le cose da me fin qui prodotte ed in particolare questa, che la differenza di gravità, benchè grandissima, non abbia parte veruna nel diversificare le velocità dei mobili, sì che, per quanto da quella dipende, tutti si moverebbero con egual celerità, è tanto nuova e nella prima apprensione remota dal verisimile, che quando non si avesse modo di dilucidarla e renderla più chiara che il sole, meglio sarebbe il tacerla che il pronunciarla; però già che me la sono lasciata scappar di bocca, convien che io non lasci indietro esperienza o ragione che possa corroborarla.

Sagr. Non questa sola ma molte altre insieme delle vostre proposizioni sono così remote dalle opinioni e dottrine comunemente ricevute, che spargendosi in pubblico vi concitérebbero numero grande di contradditori, essendo che l'innata condizione degli uomini non vede con buon occhio che altri nel loro esercizio scuopra verità o falsità non scoperte da loro; e col dar titolo d' innovatori di dottrine, poco grato agli orecchi di molti, s' ingegnano di tagliar quei nodi che non possono sciorre, e con mine sotterranee dissipar quelli edifizj che sono stati con gli strumenti consueti da pazienti artefici costrutti: ma con esso noi, lontani da simili pretensioni, l' esperienze vostre e le ragioni bastano a quietarci; tuttavia quando abbiate altre più palpabili esperienze e ragioni più efficaci, le sentiremo molto volentieri.

Salv. L' esperienza fatta con due mobili quanto più si possa differenti di peso col farli scendere da un' altezza per osservare se la velocità loro sia eguale, patisce qualche difficoltà; imperocchè se l' altezza sarà grande, il mezzo, che dall'impeto del cadente dee essere aperto e lateralmente spinto, di molto maggior pregiudizio sarà al piccol momento del mobile leggerissimo, che alla violenza del gravissimo, per lo

(1) Aggiunta di Galileo.

che per lungo spazio il leggero rimarrà indietro, e nell'altezza piccola si potrebbe dubitare se veramente non vi fusse differenza, o pur se ve ne fusse, ma inosservabile. E però sono andato pensando di reiterar tante volte la scesà da piccole altezze, ed accumulare insieme tante di quelle minime differenze di tempo, che potessero intercedere tra l'arrivo al termine del grave e l'arrivo del leggero, che così congiunte facessero un tempo non solo osservabile, ma grandemente osservabile. In oltre, per potermi prevalere di moti quanto si possa tardi, nei quali manco lavora la resistenza del mezzo in alterar l'effetto che dipende dalla semplice gravità, sono andato pensando di fare scendere i mobili sopra un piano declive non molto elevato sopra l'orizzontale, chè sopra questo non meno che nel perpendicolo potrà scorgersi quello che facciano i gravi differenti di peso; e passando più avanti ho anco voluto liberarmi da qualche impedimento che potesse nascer dal contatto di essi mobili sul detto piano declive; e finalmente ho preso due palle, una di piombo e una di sughero, quella ben più di cento volte più grave di questa, e ciascheduna di loro attaccata a due sottili spaghetti eguali, lunghi quattro o cinque braccia, legati ad alto; allontanata poi l'una e l'altra palla dallo stato perpendicolare, gli ho dato l'andare nell'istesso momento, ed esse scendendo per le circonferenze di cerchi descritti dagli spaghi, eguali lor semidiametri, e passate oltre al perpendicolo, son poi per le medesime strade ritornate indietro; e reiterando ben cento volte per lor medesime le andate e le tornate, hanno sensatamente mostrato, come la grave va talmente sotto il tempo della leggera, che nè in ben cento vibrazioni, nè in mille anticipa il tempo d'un minimo momento; ma camminano con passo egualissimo. Scorgesi anco l'operazione del mezzo, il quale, arrecando qualche impedimento al moto, assai più diminuisce le vibrazioni del sughero che quelle del piombo, ma non però che le renda più o meno frequenti; anzi quando gli archi passati dal sughero non fussero più che di cinque o sei gradi, e quei del piombo cinquanta o sessanta, son eglino passati sotto i medesimi tempi.

Simp. Se questo è, come dunque non sarà la velocità del piombo maggiore della velocità del sughero, facendo quello sessanta gradi di viaggio nel tempo che questo ne passa appena sei?

Salv. Ma che direste, Sig. Simplicio, quando amendue spedissero nell'istesso tempo i loro viaggi, mentre il sughero allontanato dal perpendicolo trenta gradi, avesse a passar l'arco di sessanta, e il piombo slargato dal medesimo punto di mezzo due soli gradi, scorresse l'arco di quattro? non sarebbe allora altrettanto più veloce il sughero? e pur l'esperienza mostra ciò avvenire; però notate. Slargato il pendolo del piombo, v. g, cinquanta gradi dal perpendicolo, e di lì lasciato in libertà, scorre, e passando oltre al perpendicolo quasi altri cinquanta, descrive l'arco di quasi cento gradi, e ritornando per sè stesso indietro descrive un altro minore arco, e continuando le sue vibrazioni, dopo gran numero di quelle, si riduce finalmente alla quiete. Ciascheduna di tali vibrazioni si fa sotto tempi eguali, tanto quella di novanta gradi, quanto quella di cinquanta o di venti, di dieci, di quattro; sì che in conseguenza la velocità del mobile vien sempre languendo, poichè sotto tempi eguali va passando successivamente archi sempre minori e minori. Un simile, anzi l'istesso effetto fa il sughero pendente da un filo altrettanto lungo, salvo che in minor numero di vibrazioni si conduce alla quiete, come meno atto, mediante la sua leggerezza, a superar l'ostacolo dell'aria: con tutto ciò tutte le vibrazioni grandi e piccole si fanno sotto tempi eguali tra di loro, ed eguali ancora ai tempi delle vibrazioni del piombo. Onde è vero che, se mentre il piombo passa un arco di cinquanta gradi, il sughero ne passa uno di dieci, il sughero allora è più tardo del piombo; ma accaderà ancora all'incontro che il sughero passi l'arco di cinquanta quando il piombo passi quel di dieci o di sei, e così in diversi tempi or sarà più veloce il piombo ed ora il sughero; ma se gli stessi mobili passeranno ancora, sotto i medesimi tempi eguali, archi eguali, ben sicuramente si potrà dire allora essere le velocità loro eguali.

Simp. Mi pare e non mi pare che questo discorso sia concludente, e mi sento nella mente una tal qual confusione, che mi nasce dal muoversi e l'uno e l'altro mobile or veloce, or tardo ed or tardissimo, che non mi lascia ridurre in chiaro come vero sia che le velocità loro siano sempre eguali.

Sagr. Concedami in grazia, Sig. Salviati, che io dica due parole. E ditemi, Sig. Simplicio, se voi ammettete che dir si possa con assoluta verità, le velocità del sughero e del piombo essere eguali ogni volta che, partendosi amendue nell' istesso momento dalla quiete e movendosi per le medesime inclinazioni, passassero sempre spazi eguali in tempi eguali?

Simp. In questo non si può dubitare, nè se gli può contraddire.

Sagr. Accade ora nei pendoli, che ciaschedun di loro passi or sessanta gradi, or cinquanta, or trenta, or dieci, or otto, quattro, due, e quando amendue passano l' arco di sessanta gradi, lo passano nell' istesso tempo: nell' arco di cinquanta metton l' istesso tempo l' uno che l' altro mobile: così nell' arco di trenta, di dieci e degli altri; e però si conclude che la velocità del piombo nell' arco di sessanta gradi è eguale alla velocità del sughero nell' arco medesimo di sessanta: e che le velocità nell' arco di cinquanta son pur tra loro eguali, e così negli altri. Ma non si dice già che la velocità, che si esercita nell' arco di sessanta, sia eguale alla velocità che si esercita nell' arco di cinquanta, nè questa a quella dell' arco di trenta, ma son sempre minori le velocità negli archi minori: il che si raccoglie dal veder noi sensatamente il medesimo mobile metter tanto tempo nel passar l' arco grande dei sessanta gradi, quanto nel passare il minor di cinquanta o il minimo di dieci, ed in somma nell' esser passati tutti sempre sotto tempi eguali. È vero dunque che ben vanno e il piombo e il sughero ritardando il moto secondo la diminuzione degli archi, ma non però alterano la concordia loro nel mantener l' egualità della velocità in tutti i medesimi archi da loro passati. Ho voluto dir questo più per sentire se ho ben capito il concetto del Sig. Salviati, che per bisogno

che io credessi che avesse il Sig. Simplicio di più chiara esplicazione di quella del Sig. Salviati, che è, come in tutte le sue cose, lucidissima, e tale che sciogliendo egli il più delle volte questioni non solo in apparenza oscure, ma repugnanti alla natura ed al vero, con ragioni o osservazioni o esperienze tritissime e familiari ad ognuno, ha (come da diversi ho inteso) dato occasione a taluno dei professori più stimati di far minor conto delle sue novità, tenendole come a vile, per dipendere da troppo bassi e popolari fondamenti, quasi che la più ammirabile e più da stimarsi condizione delle scienze dimostrative non sia lo scaturire e pullulare da principj notissimi, intesi e conceduti da tutti. Ma seguitiamo pur noi di andarci pascendo di questi cibi leggieri; e posto che il Sig. Simplicio sia restato appagato nell' intender ed ammettere, come l' interna gravità dei diversi mobili non abbia parte alcuna nel diversificar le velocità loro, sì che tutti, per quanto da quella dipende, si moverebber con l' istesse velocitadi; diteci, Sig. Salviati, in quello che voi riponete le sensate ed apparenti diseguallità di moto, e rispondete a quell' instanza che oppone il Sig. Simplicio, e che io parimente confermo, dico del vedersi una palla di artiglieria muoversi più velocemente di una migliarola di piombo, che poca sarà la differenza di velocità rispetto a quella che vi oppongo io di mobili dell' istessa materia, dei quali alcuni dei maggiori scenderanno in meno di una battuta di polso in un mezzo quello spazio, che altri minori non lo passeranno in un' ora, nè in quattro nè in venti, quali sono le pietre e la minuta rena, e massime quella sottilissima che intorbida l' acqua, nel qual mezzo in molte ore non iscende per due braccia, che pietruzze non molto grandi passano in una battuta di polso.

Salv. Quel che operi il mezzo nel ritardar più i mobili, secondo che tra di loro sono in ispecie men gravi, già si è dichiarato, mostrando ciò accadere dalla suttrazione di peso. Ma come il medesimo mezzo possa con sì gran differenza scemar la velocità nei mobili differenti solo in grandezza, ancorchè sieno della medesima materia e dell' istessa figura,

ricerca per sua dichiarazione discorso più sottile di quello che basta per intender come la figura del mobile più dilatata, o il moto del mezzo che sia fatto contro al mobile, ritarda la velocità di quello. Io del presente problema riduco la cagione alla scabrosità e porosità, che comunemente, e per lo più necessariamente, si ritrova nelle superficie dei corpi solidi, le quali scabrosità nel moto di essi vanno urtando nell'aria o altro mezzo ambiente; di che segno evidente ce ne porge il sentir noi ronzare i corpi, ancorchè quanto più si possa rotondati, mentre velocissimamente scorrono per l'aria, e non solo ronzare, ma sibilare e fischiar si sentono se qualche più notabil cavità o prominenza sarà in essi. Vedesi anco nel girar sopra il torno ogni solido rotondo fare un poco di vento. Ma che più? non sentiam noi notabil ronzio, ed in tuono molto acuto farsi dalla trottola, mentre per terra con somma celerità va girando? l'acutezza del qual sibilo si va ingravendo, secondo che la velocità della vertigine va di grado in grado languendo: argomento parimente necessario degl'intoppi nell'aria delle scabrosità benchè minime delle superficie loro. Queste non si può dubitare che, nello scendere i mobili, soffregandosi con l'ambiente fluido, apporteranno ritardamento alla velocità, e tanto maggiore quanto la superficie sarà più grande, quale è quella dei solidi minori paragonati ai maggiori.

Simp. Fermate in grazia, perchè qui comincio a confondermi: imperocchè sebbene io intendo ed ammetto che la confricazione del mezzo con la superficie del mobile ritardi il moto, e che più lo ritardi dove, ceteris paribus, la superficie sia maggiore, non capisco però con qual fondamento voi chiamate maggiore la superficie dei solidi minori: ed oltre a ciò, se, come voi affermate, la maggior superficie dee arrecar maggior ritardamento, i solidi maggiori dovriano esser più tardi, il che non è: ma questa instanza facilmente si toglie con dire, che sebben il maggiore ha maggior superficie, ha anco maggior gravità, contro la quale l'impedimento della maggior superficie non ha a prevalere all'impedimento della superficie minore contro alla minor gravità, sì che la velocità

prima che passiamo più avanti, avrei caro di restar capace di un termine che mi giunse nuovo, quando pur ora diceste che i solidi simili son tra di loro in sesquialtera proporzione delle lor superficie, perchè ho ben veduto e inteso la proposizione con la sua dimostrazione, nella quale si prova la superficie de' solidi simili essere in duplicata proporzione dei loro lati, e l'altra che prova i medesimi solidi essere in tripla proporzione dei medesimi lati, ma la proporzione dei solidi con le lor superficie non mi sovvien nè anco di averla sentita nominare.

Salv. V. S. medesima da per sè si risponde, e dichiara il dubbio. Imperocchè quello che è triplo di una cosa, della quale un altro è doppio, non viene egli ad esser sesquialtero di questo doppio? certo sì. Or se le superficie sono in doppia proporzione delle linee, delle quali i solidi sono in proporzione tripla, non possiam noi dire i solidi essere in sesquialtera proporzione delle superficie?

Sagr. Ho inteso benissimo. E sebbene alcuni altri particolari attenenti alla materia di cui si tratta mi resterebbero da domandare, tuttavia, quando ce ne andassimo così di digressione in digressione, tardi verremmo alle quistioni principalmente intese, che appartengono alle diversità degli accidenti delle resistenze dei solidi all'esser spezzati; e però, quando così piaccia loro, potremo ritornare sul primo filo, che si propose da principio.

Salv. V. S. dice molto bene, ma le cose tante e tanto varie, che si sono esaminate, ci han rubato tanto tempo, che poco ce ne avanzerà per questo giorno da spendere nell'altro nostro principale argomento, che è pieno di dimostrazioni geometriche da esser con attenzione considerate; onde stimerei che fusse meglio differire il congresso a dimane, sì per questo che ho detto, come ancora perchè potrei portar meco alcuni fogli, dove ho per ordine notati i teoremi e problemi, nei quali si propongono e dimostrano le diverse passioni di tal soggetto, che forse alla memoria, col necessario metodo, non mi sovverrebbero.

Sagr. Io molto bene mi accomodo a questo consiglio, e

tanto più volentieri, quanto che per finire la sessione odierna avrò tempo di sentir la dichiarazione di alcuni dubbj che mi restavano nella materia che ultimamente trattavamo. Dei quali uno è, se si dee stimare che l'impedimento del mezzo possa esser bastante a por termine all'accelerazione a' corpi di materia gravissima, grandissimi di mole, e di figura sferica; e dico sferica, per pigliar quella che è contenuta sotto la minima superficie, e però meno soggetta al ritardamento. Un altro sarà circa le vibrazioni dei pendoli, e questo ha più capi: l'uno sarà se tutte, e grandi e mediocri e minime, si fanno veramente e precisamente sotto tempi eguali: ed un altro, qual sia la proporzione dei tempi dei mobili appesi a fili diseguali, dei tempi, dico, delle lor vibrazioni.

Salv. I quesiti son belli, e sì come avviene di tutti i veri, dubito che trattandosi di qualsisia di loro si tirerà dietro tante altre vere e curiose conseguenze, che non so se l'avanzo di questo giorno ci basterà per discuterle tutte.

Sagr. Se elle saranno del sapor delle passate, più grato mi sarebbe l'impiegarvi tanti giorni, non che tante ore, quanto restano sino a notte, e credo che il Sig. Simplicio non si ristuccherà di tali ragionamenti.

Simp. Sicuramente no, e massime quando si trattano quistioni naturali, intorno alle quali non si leggono opinioni o discorsi di altri filosofi.

Salv. Vengo dunque alla prima, affermando senza veruna dubitazione, non essere sfera sì grande, nè di materia sì grave, che la renitenza del mezzo, ancorchè tenuissimo, non raffreni la sua accelerazione, e che nella continuazion del moto non lo riduca all'equabilità; di che possiamo ritrar molto chiaro argomento dall'esperienza stessa. Imperocchè se alcun mobile cadente fusse abile nella sua continuazion di moto ad acquistar qualsivoglia grado di velocità, nessuna velocità, che da motore esterno gli fusse conferita, potrebbe esser così grande, ch'egli la ricusasse e se ne spogliasse mercè dell'impedimento del mezzo. E così una palla di artiglieria che fusse scesa per aria, v. g, quattro braccia, ed avesse, per esempio, acquistato dieci gradi di velocità, e che con questi entrasse

nell' acqua, quando l' impedimento dell' acqua non fusse potente a vietare alla palla un tale impeto, ella l' accrescerebbe o almeno lo continuerebbe sino al fondo; il che non si vede seguire; anzi l'acqua, benchè non fusse più che poche braccia profonda, l' impedisce e debilita in modo, che leggerissima percossa farà nel letto del fiume o del lago. È dunque manifesto che quella velocità, della quale l' acqua l' ha potuta spogliare in un brevissimo viaggio, non gliela lascerebbe giammai acquistare anco nella profondità di mille braccia. E perchè permettergli il guadagnarsela in mille, per levargliela poi in quattro braccia? Ma che più? non si vede egli l' immenso impeto della palla cacciata dall' istessa artiglieria esser talmente rintuzzato dall' interposizione di pochissime braccia di acqua, che senza veruna offesa della nave appena si conduce a percuoterla? L' aria ancora, benchè cedentissima, pur reprime la velocità del mobile cadente ancor molto grave, come possiamo con simili esperienze comprendere; perchè se dalla cima di una torre molto alta tireremo una archibusata in giù, questa farà minor botta in terra che se scaricheremo l' archibuso alto dal piano solamente quattro o sei braccia, segno evidente che l' impeto, con che la palla uscì dalla canna scaricata nella sommità della torre, andò diminuendosi nello scender per aria; adunque lo scender da qualunque grandissima altezza non basterà per fargli acquistare quell' impeto, del quale la resistenza dell' aria la priva, quando già in qualsivoglia modo gli sia stato conferito. La rovina parimente che farà in una muraglia un colpo di una palla cacciata da una colubrina dalla lontananza di venti braccia, non credo io che la facesse venendo a perpendicolo da qualsivoglia altezza immensa. Stimo pertanto esser termine all' accelerazione di qualsivoglia mobile naturale, che dalla quiete si parta, e che l' impedimento del mezzo finalmente lo riduca all' egualità, nella quale ben poi sempre si mantenga.

Sagr. L' esperienze veramente mi par che siano molto a proposito; nè ci è altro se non che l' avversario potrebbe farsi forte col negar che si debbano verificar nelle moli grandissime e gravissime, e che una palla di artiglieria venendo dal

concavo della luna, o anco dalla suprema region dell' aria farebbe percossa maggiore che uscita dal cannone.

Salv. Non è dubbio che molte cose si possono opporre, e che non tutte si possono con esperienza redarguire; tuttavia in questa contraddizione alcuna cosa par che si possa mettere in considerazione: cioè che molto ha del verisimile che il grave cadente da un' altezza acquisti tanto d' impeto nell' arrivare in terra, quanto fusse bastante a tirarlo a quell'altezza, come chiaramente si vede in un pendolo assai grave, che slargato cinquanta o sessanta gradi dal perpendicolo, guadagna quella velocità e virtù che basta precisamente a sospignerlo ad altrettanta elevazione, trattone però quel poco che gli vien tolto dall' impedimento dell' aria. Per costituir dunque la palla dell' artiglieria in tanta altezza, che bastasse per l' acquisto di tanto impeto quanto è quello che gli dà il fuoco nell' uscir del pezzo, dovrebbe bastare il tirarla in su a perpendicolo con l' istessa artiglieria, osservando poi se nella ricaduta ella facesse colpo eguale a quello della percossa fatta da vicino nell' uscire; che credo veramente che non sarebbe a gran segno tanto gagliardo. E però stimo che la velocità, che ha la palla vicino all' uscita del pezzo, sarebbe di quelle che l' impedimento dell' aria non gli lascerebbe conseguire giammai mentre con moto naturale scendesse, partendosi dalla quiete da qualsivoglia grand' altezza. Vengo ora agli altri quesiti attenenti ai pendoli, materia che a molti parrebbe assai arida, e massime a quei filosofi che stanno continuamente occupati nelle più profonde questioni delle cose naturali; tuttavia non li voglio disprezzare, inanimito dall' esempio d'Aristotile medesimo, nel quale io ammiro sopra tutte le cose il non aver egli lasciato, si può dir, materia alcuna degna in qualche modo di considerazione che e' non abbia toccata. Ed ora dai quesiti di V. S. penso che potrò dirvi qualche mio pensiero sopra alcuni problemi attenenti alla musica, materia nobilissima, della quale hanno scritto tanti grandi uomini; e l' istesso Aristotile circa di essa considera molti problemi curiosi; tal che se io ancora da così facili e sensate esperienze trarrò ragioni di accidenti maravigliosi in materia dei suoni,

posso sperare che i miei ragionamenti siano per esser graditi da voi.

Sagr. Non solamente graditi, ma da me in particolare sommamente desiderati, come quello che sendomi dilettato di tutti gli strumenti musici, ed assai filosofato intorno alle consonanze, son sempre restato incapace e perplesso onde avvenga che più mi piaccia e diletti questa che quella, e che alcuna non solo non mi diletti, ma sommamente mi offenda. Il problema poi trito delle due corde tese all'unisono, che al suono dell'una l'altra si muova e attualmente risuoni, mi resta ancora irresoluto, come anco non ben chiare le forme delle consonanze, ed altre particolarità.

Salv. Vedremo se da questi nostri pendoli si possa cavare qualche soddisfazione a tutte queste difficoltà. E quanto al primo dubbio, che è, se veramente e puntualissimamente l'istesso pendolo fa tutte le sue vibrazioni massime, mediocri e minime sotto tempi precisamente eguali, io mi rimetto a quello che intesi già dal nostro Accademico, il quale dimostra bene, che il mobile che discendesse per le corde suttese a qualsivoglia arco, le passerebbe necessariamente tutte in tempi eguali, tanto la suttesa sotto cent'ottanta gradi (cioè tutto il diametro) quanto le suttese di cento, di sessanta, di due, di mezzo e di quattro minuti: intendendo che tutte vadano a terminar nell'infimo punto toccànte il piano orizzontale. Circa poi i discendenti per gli archi delle medesime corde elevati sopra l'orizzonte, e che non siano maggiori d'una quarta, cioè di novanta gradi, mostra parimente l'esperienza passarsi tutti in tempi eguali, ma però più brevi dei tempi de' passaggi per le corde; effetto che in tanto ha del maraviglioso, in quanto nella prima apprensione par che dovrebbe seguire il contrario. Imperocchè sendo comuni i termini del principio e del fine del moto, ed essendo la linea retta la brevissima che tra i medesimi termini si comprende, par ragionevole che il moto fatto per lei s'avesse a spedire nel più breve tempo, il che poi non è: ma il tempo brevissimo, ed in conseguenza il moto velocissimo, è quello che si fa per l'arco del quale essa linea retta è corda. Quanto poi alla

proporzione dei tempi delle vibrazioni di mobili pendenti da fila di differente lunghezza, *le replicate sperienze, con le quali ciascuno può soddisfarsi*, *mi hanno dimostrato che* sono essi tempi in proporzione suddupla delle lunghezze delle fila, o vogliam dire le lunghezze essere in duplicata proporzion dei tempi, cioè son come i quadrati dei tempi *delle singolari vibrazioni, o d' egual numero di vibrazioni;* sì che volendo, v. g., che il tempo d' una vibrazione d' un pendolo sia doppio del tempo d' una vibrazione d' un altro, bisogna che la lunghezza della corda di quello sia quadrupla della lunghezza della corda di questo. Ed allora nel tempo d' una vibrazione di un pendolo, un altro ne farà tre, quando la corda di quello sarà nove volte più lunga dell' altra. Dal che ne seguita che le lunghezze delle corde hanno fra di loro la proporzione *reciproca* che hanno i quadrati de' numeri delle vibrazioni che si fanno nel medesimo tempo.

Sagr. Adunque, se io ho bene inteso, potrò speditamente sapere la lunghezza d' una corda pendente da qualsivoglia grandissima altezza, quando bene il termine sublime dell' attaccatura mi fusse invisibile, e solo si vedesse l' altro estremo basso. Imperocchè se io attaccherò qui da basso un assai grave peso a detta corda, e farò che si vada vibrando in qua e in là, e che un amico vada numerando alcune delle sue vibrazioni, e che io nell' istesso tempo vada parimente contando le vibrazioni che farà un altro mobile appeso a un filo di lunghezza precisamente d' un braccio, dai numeri delle vibrazioni di questi pendoli, fatte nell' istesso tempo, troverò la lunghezza della corda, *perchè facendo come il quadrato del piccol numero delle vibrazioni del lungo pendolo al quadrato del gran numero delle vibrazioni del corto, così la lunghezza nota di queste ad un' altra, essa sarà l' ignota lunghezza del lungo;* come, per esempio, ponghiamo che nel tempo che l' amico mio abbia contate venti vibrazioni della corda lunga, io ne abbia contate dugenquaranta del mio filo, che è lungo un braccio, fatto i quadrati delli due numeri venti e dungenquaranta, che sono 400, 57,600, dirò la lunga corda contener 57,600 misure di quelle che il mio filo *corto* ne contien

400; e perchè il filo è un sol braccio, partirò 57,600 per 400, che ne viene 144; e 144 braccia dirò esser lunga quella corda.

Salv. Nè v' ingannerete d' un palmo, e massime se piglierete moltitudini grandi di vibrazioni *passate dentro all'istesso tempo dall' uno e dall' altro pendolo.*

Sagr. V. S. mi dà pur frequentemente occasione d' ammirare la ricchezza ed insieme la somma liberalità della natura, mentre da cose tanto comuni, e direi anco in certo modo vili, nè andate traendo notizie molto curiose e nuove, e bene spesso remote da ogni immaginazione. Io ho ben mille volte posto cura alle vibrazioni in particolare delle lampade pendenti in alcune chiese da lunghissime corde, inavvertentemente state mosse da alcuno, ma il più che io cavassi da tale osservazione fu l' improbabilità dell' opinione di quelli che vogliono che simili moti vengano mantenuti e continuati dal mezzo, cioè dall' aria; perchè mi parrebbe bene che l' aria avesse un gran giudizio, ed insieme una poca faccenda a consumar le ore e le ore di tempo in sospingnere con tanta regola in qua e in là un peso pendente: ma che io fussi per apprenderne che quel mobile medesimo appeso a una corda di cento braccia di lunghezza, slontanato dall' imo punto una volta novanta gradi ed un' altra un grado solo o mezzo, tanto tempo spendesse in passar questo minimo quanto in passar quel massimo arco, certo non credo che mai l' avrei incontrato, che ancora ancora mi par che tenga dell' impossibile. Ora sto aspettando di sentire che queste medesime semplicissime minuzie mi assegnino ragioni tali di quei problemi musici, che mi possano almeno in parte quietar la mente.

Salv. Prima d' ogni altra cosa bisogna avvertire che ciaschedun pendolo ha il tempo delle sue vibrazioni talmente limitato e prefisso, che impossibil cosa è il farlo muovere sotto altro periodo che l' unico suo naturale. Prenda pur chi si voglia in mano la corda ond' è attaccato il peso, e tenti quanto gli piace d' accrescergli o scemargli la frequenza delle sue vibrazioni, sarà fatica buttata in vano; ma ben all' incontro ad un pendolo, ancorchè grave e posto in quiete, col solo sof-

fiarvi dentro conferiremo noi moto, e moto assai grande col reiterare i soffi, ma sotto il tempo che è proprio quel delle sue vibrazioni; che se al primo soffio l' avremo rimosso dal perpendicolo mezzo dito, aggiugnendogli il secondo dopo che, sendo ritornato verso noi, comincerebbe la seconda vibrazione, gli conferiremo nuovo moto, e così successivamente con altri soffi, ma dati a tempo, e non quando il pendolo ci viene incontro (che così gl' impediremo e non aiuteremo il moto); e seguendo, con molti impulsi gli conferiremo impeto tale, che maggior forza assai che quella d' un soffio ci bisognerà a cessarlo.

Sagr. Ho da fanciullo osservato, con questi impulsi dati a tempo, un uomo solo far suonare una grossissima campana, e nel volerla poi fermare attaccarsi alla corda quattro o sei altri, e tutti esser levati in alto, nè poter tanti insieme arrestar quell' impeto che un solo con regolati tratti gli aveva conferito.

Salv. Esempio che dichiara il mio intento non meno acconciamente di quel che questa mia premessa si accomodi a render la ragione del maraviglioso problema della corda della cetera o del cimbalo, che muove e fa realmente suonare quella non solo che all' unisono gli è concorde, ma anco all'ottava e alla quinta. Toccata, la corda comincia e continua le sue vibrazioni per tutto il tempo *almeno* che *da' nostri orecchi* si sente durar la sua risonanza: queste vibrazioni fanno vibrare e tremare l' aria che gli è appresso, i cui tremori e increspamenti si distendono per grande spazio, e vanno a urtare in tutte le corde del medesimo strumento, ed anco di altri vicini: la corda che è tesa all' unisono con la tocca, essendo disposta a far le sue vibrazioni sotto il medesimo tempo, comincia al primo impulso a muoversi un poco, e sopraggiugnendogli il secondo, il terzo, il ventesimo e più altri, e tutti negli aggiustati e periodici tempi, riceve finalmente il medesimo tremore che la prima tocca, e si vede chiarissimamente andar dilatando le sue vibrazioni giusto allo spazio della sua motrice. Quest'ondeggiamento, che si va distendendo per l' aria, muove e fa vibrare non solamente le corde, ma

qualsivoglia altro corpo disposto a tremare e vibrarsi sotto quel tempo della tremante corda: sì che se si ficcheranno nelle sponde dello strumento diversi pezzetti di setole o di altre materie flessibili, si vedrà nel suonare il cimbalo tremare or questo or quel corpuscolo, secondo che verrà toccata quella corda, le cui vibrazioni van sotto il medesimo tempo: gli altri non si muoveranno al suono di questa corda, nè quello tremerà al suono d' altra corda. Se con l' archetto si toccherà gagliardamente una corda grossa d'una viola, appressandogli un bicchiere di vetro sottile e pulito, quando il tuono della corda sia all' unisono del tuono del bicchiere, questo tremerà e sensatamente risuonerà. Il diffondersi poi amplamente l' increspamento del mezzo intorno al corpo risuonante, apertamente si vede nel far suonare il bicchiere dentro il quale sia dell' acqua, fregando il polpastrello del dito sopra l' orlo; imperocchè l' acqua contenuta con regolatissimo ordine si vede andare ondeggiando, e meglio ancora si vedrà l' istesso effetto fermando il piede del bicchiere nel fondo di qualche vaso assai largo, nel quale sia dell' acqua sin presso all' orlo del bicchiere, che parimente facendolo risuonare con la confricazione del dito, si vedranno gl' increspamenti nell' acqua regolatissimi, e con gran velocità spargersi in gran distanza intorno al bicchiere; ed io più volte mi sono incontrato, nel fare al modo detto suonare un bicchiere assai grande e quasi pieno d' acqua, a veder prima le onde nell' acqua con estrema egualità formate; ed accadendo talvolta che il tuono del bicchiere salti un' ottava più alto, nell' istesso momento ho visto ciascheduna delle dette onde dividersi in due: accidente che molto chiaramente conclude la forma dell' ottava esser la dupla.

Sagr. A me ancora è intervenuto l' istesso più d' una volta con mio diletto ed anco utile; imperocchè stetti lungo tempo perplesso intorno a queste forme delle consonanze, non mi parendo che la ragione che comunemente se n' adduce dagli autori, che sin qui hanno scritto dottamente della musica, fusse concludente a bastanza. Dicono essi la Diapason, cioè l' ottava, esser contenuta dalla dupla; la Diapente, che

noi diciamo la quinta, dalla sesquialtera; perchè distesa sopra il monocordo una corda, sonandola tutta e poi sonandone la metà col mettere un ponticello in mezzo, si sente l'ottava, e se il ponticello si metterà al terzo di tutta la corda, toccando l'intera e poi li due terzi, ci rende la quinta; per lo che che l'ottava dicono esser contenuta tra il due e l'uno, e la quinta tra li tre e il due. Questa ragione, dico, non mi pareva concludente per poter assegnare juridicamente la dupla e la sesquialtera per forme naturali della Diapason e della Diapente. E il mio motivo era tale. Tre sono le maniere colle quali noi possiamo inacutire il tuono a una corda; l'una è lo scorciarla, l'altra il tenderla più, o vogliam dir tirarla, il terzo è l'assottigliarla. Ritenendo la medesima tiratezza e grossezza della corda, se vorremo sentir l'ottava, bisogna scorciarla la metà, cioè toccarla tutta e poi mezza. Ma se ritenendo la medesima lunghezza e grossezza vorremo farla montare all'ottava col tirarla più, non basta tirarla il doppio più, ma ci bisogna il quadruplo, sì che se prima era tirata dal peso d'una libbra, converrà attaccarvene quattro per inacutirla all'ottava. E finalmente, se stante la medesima lunghezza e tiratezza, vorremo una corda, che per esser più sottile renda l'ottava, sarà necessario che ritenga solo la quarta parte della grossezza dell'altra più grave. E questo che dico dell'ottava, cioè che la sua forma presa dalla tensione o dalla grossezza della corda è in duplicata proporzione di quella che si ha dalla lunghezza, intendasi di tutti gli altri intervalli musici; imperocchè quello che ci dà la lunghezza con la proporzion sesquialtera, cioè col suonarla tutta e poi li due terzi, volendolo cavar dalla tiratezza o dalla sottigliezza, bisogna duplicar la proporzione sesquialtera pigliando la dupla sesquiquarta, e se la corda grave era tesa da quattro libbre di peso, attaccarne all'acuta non sei, ma nove; e quanto alla grossezza, far la corda grave più grossa dell'acuta secondo la proporzione di nove a quattro per aver la quinta. Stante queste verissime esperienze, non mi pareva scorger ragione alcuna per la quale avessero i sagaci filosofi a stabilire, la forma dell'ottava esser più la

dupla che la quadrupla, e della quinta più la sesquialtera che la dupla sesquiquarta. Ma perchè il numerare le vibrazioni d'una corda, che nel render la voce le fa frequentissime, è del tutto impossibile, sarei restato sempre ambiguo se vero fusse che la corda dell'ottava più acuta facesse nel medesimo tempo doppio numero di vibrazioni di quelle della più grave, se le onde permanenti per quanto tempo ci piace, nel far suonare e vibrare il bicchiere, non m'avessero sensatamente mostrato come, nell'istesso momento che alcuna volta si sente il tuono saltare all'ottava, si vedono nascere altre onde più minute, le quali con infinita pulitezza tagliano in mezzo ciascuna di quelle prime.

SALV. Bellissima osservazione per poter distinguere ad una ad una le onde nate dal tremore del corpo che risuona, che son poi quelle che diffuse per l'aria vanno a far la titillazione su il timpano del nostro orecchio, la quale nell'anima ci diventa suono. Ma dove che il vederle ed osservarle nell'acqua non dura se non quanto si continua la confricazion del dito, ed anco in questo tempo non sono permanenti, ma continuamente si fanno e si dissolvono, non sarebbe bella cosa quando se ne potesse far con grand'esquisitezza di quelle che restassero lungo tempo, dico mesi ed anni, sì che si avesse comodità di poterle misurare ed agiatamente numerare?

SAGR. Veramente io stimerei sommamente una tale invenzione.

SALV. L'invenzione fu del caso, e mia fu solamente la osservazione, e il far di essa capitale e stima come di riprova di nobil contemplazione, ancorchè fattura in sè stessa assai vile. Raschiando con uno scarpello di ferro tagliente una piastra di ottone per levarle alcune macchie, nel muovervi sopra lo scarpello con velocità, sentii una volta e due, tra molte strisciate, fischiare e uscirne un sibilo molto gagliardo e chiaro, e guardando sopra la piastra, vidi un lungo ordine di virgolette sottili tra di loro parallele, e per egualissimi intervalli l'una dall'altra distanti. Tornando a raschiar di nuovo più e più volte, mi accorsi che solamente

nelle raschiate che fischiavano lasciava lo scarpello le intaccature sopra la piastra, ma quando la strisciata passava senza sibilo, non restava pur minima ombra di tali virgolette. Replicando poi altre volte lo scherzo, strisciando ora con maggiore ed ora con minore velocità, il sibilo riusciva di tuono or più acuto ed or più grave, ed osservai i segni fatti nel suono più acuto esser più spessi, e quelli del più grave più radi, e talora ancora, secondo che la strisciata medesima era fatta verso il fine con maggiore velocità che nel principio, si sentiva il suono andarsi inacutendo, e le virgolette si vedeva essere andate inspessendosi, ma sempre con estrema lindura, e con assoluta equidistanza segnate; ed oltre a ciò nelle strisciate sibilanti sentiva tremarmi il ferro in pugno, e per la mano scorrermi certo rigore. Ed insomma si vede e sente fare al ferro quello per appunto che facciamo noi nel parlar sotto voce e nell'intonar poi il suono gagliardo, che mandando fuora il fiato senza formare il suono, non sentiamo nella gola e nella bocca farsi movimento alcuno, rispetto però ed in comparazione del tremor grande che sentiamo farsi nella laringe ed in tutte le fauci nel mandar fuora la voce, e massime in tuono grave e gagliardo. Ho anco talvolta tra le corde del cimbalo notatone due unisone alli due sibili fatti strisciando al modo detto, e di più differenti di tuono, dei quali due precisamente distavano per una quinta perfetta, e misurando poi gl'intervalli delle virgolette dell'una e dell'altra strisciata, si vedeva la distanza che conteneva quarantacinque spazj dell'una contenere trenta dell'altra; quale veramente è la forma che si attribuisce alla Diapente. Ma qui, prima che passare più avanti, voglio avvertirvi che delle tre maniere d'inacutire il suono, quella che voi riferite alla sottigliezza della corda, con più verità deve attribuirsi al peso. Imperocchè l'alterazione presa dalla grossezza risponde *solo* quando le corde siano della medesima materia, e così una minugia per far l'ottava deve esser più grossa quattro volte dell'altra pur di minugia, *che sia egualmente lunga ed egualmente tirata;* ed una di ottone, più grossa quattro volte di un'altra di ottone. Ma se io vorrò far l'ottava con

una di ottone ed una di minugia *di egual lunghezza e tensione*, non si ha da ingrossar quattro volte, ma sì ben farla quattro volte più grave, sì che, quanto alla grossezza, questa di metallo non sarà altrimenti quattro volte più grossa, ma ben quadrupla in gravità, che talvolta sarà più sottile che la sua rispondente all' ottava più acuta, che sia di minugia. Onde accade che incordandosi un cimbalo di corde di oro ed un altro di ottone, se saranno della medesima lunghezza, grossezza e tensione, per esser l' oro quasi il doppio più grave, riuscirà l'accordatura circa una quinta più grave. E qui notisi, come alla velocità del moto più resiste la gravità del mobile che la grossezza, contro a quello che a prima fronte altri giudicherebbe; che ben pare che ragionevolmente più dovesse esser ritardata la velocità dalla resistenza del mezzo all' esser aperto in un mobile grosso e leggero, che in uno grave e sottile; tuttavia in questo caso accade tutto l'opposito. Ma seguitando il primo proposito, dico che non è la ragion prossima ed immediata delle forme degl' intervalli musici la lunghezza delle corde, non la tensione, non la grossezza, *o per meglio dire non il peso*, ma sì ben la proporzion dei numeri delle vibrazioni e percosse dell' onde dell'aria che vanno a ferire il timpano del nostro orecchio, il quale esso ancora sotto le medesime misure di tempi vien fatto tremare. Fermato questo punto, potremo per avventura assegnare assai congrua ragione onde avvenga che di essi suoni differenti di tuono alcune coppie siano con gran diletto ricevute dal nostro sensorio, altre con minore, ed altre ci feriscano con grandissima molestia; che è il cercare la ragione delle consonanze più o men perfette, e delle dissonanze. La molestia di queste nascerà, credo io, dalle discordi pulsazioni di due diversi tuoni che sproporzionatamente colpeggiano sopra il nostro timpano, e crudissime saranno le dissonanze quando i tempi delle vibrazioni fussero incommensurabili; per una delle quali sarà quella quando di due corde unisone se ne suoni una con tal parte dell'altra, quale è il lato del quadrato del suo diametro: dissonanza simile al tritono o semidiapente. Consonanti, e con diletto ricevute, saranno quelle

coppie di suoni, che verranno a percuotere con qualche ordine sopra il timpano; il quale ordine ricerca prima che le percosse fatte dentro all' istesso tempo siano commensurabili di numero, acciocchè la cartilagine del timpano non abbia a stare in un perpetuo tormento d' inflettersi in due diverse maniere per acconsentire e ubbidire alle sempre discordi battiture. Sarà dunque la prima e più grata consonanza l'ottava, essendo che per ogni percossa che dia la corda grave su il timpano, l' acuta ne dà due; talchè amendue vanno a ferire unitamente in una sì, e nell'altra no delle vibrazioni della corda acuta; sì che di tutto il numero delle percosse le metà si accordano a battere unitamente, ma i colpi delle corde unisone giungon sempre tutti insieme, e però son come di una corda sola, nè fanno consonanza. La quinta diletta ancora, attesochè per ogni due pulsazioni della corda grave l' acuta ne dà tre, dal che ne seguita che numerando le vibrazioni della corda acuta, la terza parte di tutte si accordano a battere insieme; cioè due solitarie s' interpongono tra ogni coppia delle concordi, e nella Diatessaron se n' interpongon tre. Nella seconda, cioè nel tuono sesquiottavo, per ogni nove pulsazioni una sola arriva concordemente a percuotere con l'altra della corda più grave; tutte l'altre sono discordi e con molestia ricevute su il timpano e giudicate dissonanti dall'udito.

Simp. Vorrei con maggior chiarezza spiegato questo discorso.

Salv. Sia questa linea AB (*Fig.* 13) lo spazio e la dilatazione di una vibrazione della corda grave; e la linea CD quella della corda acuta, la quale con l' altra renda l' ottava, e dividasi la AB in mezzo in E. È manifesto che cominciando a muoversi le corde nei termini A, C, quando la vibrazione acuta sarà pervenuta al termine D, l' altra si sarà distesa solamente sino al mezzo E, il quale non sendo termine del moto non percuote, ma bensì fa colpo in D. Ritornando poi la vibrazione dal D in C, l' altra passa da E in B, onde le due percosse di B e di C battono unitamente su il timpano: e tornando a reiterarsi le simili seguenti vibrazioni, si concluderà, alternatamente in una sì e nell' altra no delle vibrazioni

CD accadere l' unione delle percosse con quelle di AB: ma le pulsazioni dei termini hanno sempre per compagne una delle C, D, e sempre la medesima; il che è manifesto, perchè posto che A, C battano insieme, nel passare A in B, C va in D e torna in C, sì che i colpi A, C si fanno insieme. Ma sieno ora le due vibrazioni AB, CD quelle che producono la Diapente, i tempi delle quali sono in proporzion sesquialtera, e dividasi la AB della corda grave in tre parti eguali in E, O, e intendasi le vibrazioni cominciare nell' istesso momento dai termini A, C; è manifesto che nella percossa che si farà nel termine D, la vibrazione di AB sarà giunta solamente in O; il timpano dunque riceve la percossa D sola: nel ritorno poi da D in C, l'altra vibrazione passa da O in B e ritorna in O, facendo la pulsazione in B, che pure è sola, e dicontrattempo (accidente da considerarsi), perchè avendo noi posto le prime pulsazioni fatte nell' istesso momento nei termini A, C, la seconda, che fu sola del termine D, si fece dopo, quanto importa il tempo del transito CD, cioè AO, ma la seguente, che si fa in B, dista dall' altra solo quanto è il tempo di OB, che è la metà; continuando poi il ritorno da O in A, mentre da C si va in D, si viene a far le due pulsazioni unitamente in A e D. Seguono poi altri periodi simili a questi, cioè con l' interposizione di due pulsazioni della corda acuta scompagnate e solitarie, e una della corda grave pur solitaria e interposta tra le due solitarie dell' acuta. Sì che se noi figureremo il tempo diviso in momenti, cioè in minime particole eguali, posto che nei due primi, dalle concordi pulsazioni fatte in A, C si passi in O, D, e in D si batta; che nel terzo e quarto momento ritorni da D in C battendo in C, e che da O si passi per B e si torni in O battendosi in B; e che finalmente nel quinto e sesto momento da O e C si passi in A e D battendo in amendue, avremo sopra il timpano le pulsazioni distribuite con tale ordine, che poste le pulsazioni delle due corde nel medesimo instante, due momenti dopo riceverà una percossa solitaria, nel terzo momento un' altra pur solitaria, nel quarto un'altra sola, e due momenti dopo, cioè nel sesto, due congiunte insieme: e qui finisce il periodo, e per dir

così, l'anomalia, il qual periodo si va poi più volte replicando.

Sagr. Io non posso più tacere, è forza che io esclami il gusto che sento nel vedermi tanto adeguatamente rendute ragioni di effetti, che tanto tempo mi hanno tenuto in tenebre e cecità. Ora intendo perchè l'unisono non differisce punto da una voce sola: intendo perchè l'ottava è la principal consonanza, ma tanto simile all'unisono, che come unisono si perde e si accompagna con le altre: simile è all'unisono, perchè dove le pulsazioni delle corde unisone vanno a ferire tutte insieme sempre, queste della corda grave dell'ottava vanno tutte accompagnate da quelle dell'acuta, e di queste una s'interpone solitaria ed in distanze eguali, ed in certo modo senza fare scherzo alcuno, onde tale consonanza ne diviene sdolcinata troppo e senza brio. Ma la quinta con quei suoi contrattempi, e con l'interpor tra le coppie delle due pulsazioni congiunte, due solitarie della corda acuta, ed una pur solitaria della grave, e queste tre con tanto intervallo di tempo quanto è la metà di quello che è tra ciascuna coppia e le solitarie dell'acuta, fa una titillazione ed un solletico tale sopra la cartilagine del timpano, che temperando la dolcezza con uno spruzzo di acrimonia par che insieme soavemente baci e morda.

Salv. È forza, poichè vedo che V. S. gusta tanto di queste novellizie, che io gli mostri il modo col quale l'occhio ancora, non pur l'udito, possa ricrearsi nel vedere i medesimi scherzi che sente l'udito. Sospendete palle di piombo o altri simili gravi da tre fili di lunghezze diverse, ma tali che nel tempo che il più lungo fa due vibrazioni, il più corto ne faccia quattro, e il mezzano tre, il che accaderà quando il più lungo contenga sedici palmi o altre misure, delle quali il mezzano ne contenga nove, ed il minore quattro; e rimossi tutti insieme dal perpendicolo, e poi lasciatigli andare, si vedrà un intrecciamento vago di essi fili con incontri vari, ma tali che ad ogni quarta vibrazione del più lungo tutti tre arriveranno al medesimo termine unitamente, e da quello poi si partiranno reiterando di nuovo l'istesso periodo; la

qual mistione di vibrazioni è quella, che fatta dalle corde rende all' udito l' ottava con la quinta in mezzo. E se con simile disposizione si andranno temperando le lunghezze di altri fili, sì che le vibrazioni loro rispondano a quelle di altri intervalli musici, ma consonanti, si vedranno altri ed altri intrecciamenti, e sempre tali, che in determinati tempi e dopo determinati numeri di vibrazioni, tutti i fili (siano tre o siano quattro) si accordano a giugner nell' istesso momento al termine di loro vibrazioni, e di lì a cominciare un altro simil periodo. Ma quando le vibrazioni di due o più fili siano o incommensurabili, sì che mai non ritornino a terminar concordemente determinati numeri di vibrazioni, o se pur non essendo incommensurabili, vi ritornino dopo lungo tempo e dopo gran numero di vibrazioni, allora la vista si confonde nell' ordine disordinato di sregolata intrecciatura, e l' udito con noja riceve gli appulsi intemperati de' tremori dell'aria, che senza ordine o regola vanno a ferire sul timpano.

Ma dove, Signori miei, ci siamo lasciati trasportare per tante ore dai vari problemi ed inopinati discorsi? Siamo giunti a sera, e della proposta materia abbiamo trattato pochissimo o niente, anzi ce ne siamo in modo disviati, che appena mi sovviene della prima introduzione, e di quel poco ingresso che facemmo come ipotesi e principio delle future dimostrazioni.

Sagr. Sarà dunque bene che ponghiamo per oggi fine ai nostri ragionamenti, dando comodo alla mente di andarsi nel riposo della notte tranquillando, per tornar poi domani (quando piaccia a V. S. di favorirci) ai discorsi desiderati e principalmente intesi.

Salv. Non mancherò d' esser qua all' istessa ora di oggi a servirle e goderle.



GIORNATA SECONDA,

INTORNO

LA RESISTENZA DEI SOLIDI ALL'ESSERE SPEZZATI.

Sagr. Stavamo, il Sig. Simplicio ed io, aspettando la venuta di V. S., e nel medesimo tempo ci andavamo riducendo a memoria l'ultima considerazione, che, quasi come principio e supposizione delle conclusioni che V. S. intendeva di dimostrarci, fu circa quella resistenza che hanno tutti i corpi solidi all'esser rotti, dipendente da quel glutine che tiene le parti attaccate e congiunte, sì che non senza una potente attrazione cedono e si separano. Si andò poi cercando qual potesse esser la causa di tal coerenza, che in alcuni solidi è gagliardissima, proponendosi principalmente quella del vacuo, che fu poi cagione di tante digressioni che ci tennero tutta la giornata occupati e lontani dalla materia primieramente intesa, che era la contemplazione delle resistenze dei solidi all'essere spezzati.

Salv. Ben mi sovviene del tutto, e ritornando sul filo incominciato: Posta qualunque ella sia la resistenza dei corpi solidi all'essere spezzati per una violenta attrazione, basta che indubitabilmente ella in loro si trova, la quale, benchè grandissima contro alla forza di chi per diritto li tira, minore per lo più si osserva nel violentarli per traverso; e così vediamo una verga, per esempio, d'acciaio o di vetro reggere

per lo lungo il peso di mille libbre, che fitta a squadra in un muro si spezzerà con l'attaccargliene cinquanta solamente. E di questa seconda resistenza dobbiamo noi parlare, ricercando secondo quali proporzioni ella si ritrovi nei prismi e cilindri *e altre figure*, simili o dissimili in lunghezza e grossezza, essendo però dell'istessa materia *omogenea e non cedente*. Nella quale specolazione io piglio come principio noto quello che nelle meccaniche si dimostra tra le passioni del Vette, che noi chiamiamo Leva, cioè, che nell'uso della Leva la forza alla resistenza ha la proporzion contraria di quella che hanno le distanze tra il sostegno e le medesime forza e resistenza.

SIMP. Questo fu dimostrato da Aristotile, nelle sue meccaniche, prima che da ogni altro.

SALV. Voglio che gli concediamo il primato nel tempo, ma nella fermezza della dimostrazione parmi che se gli debba per grand' intervallo anteporre Archimede, da una sola proposizione del quale, dimostrata da esso negli Equiponderanti, dipendono le ragioni non solamente della Leva, ma della maggior parte degli altri strumenti meccanici.

SAGR. Ma giacchè questo principio è il fondamento di quello che voi avete intenzione di volerci dimostrare, non sarebbe se non molto a proposito l'arrecarci anco la prova di tal supposizione, quando non sia materia molto prolissa, dandoci una intera e compita instruzione.

SALV. Come questo si abbia a fare, sarà pur meglio che io per altro ingresso, alquanto diverso da quello d'Archimede, v'introduca nel campo di tutte le future specolazioni, e che non supponendo altro se non che pesi eguali posti in bilancia di braccia eguali facciano l'equilibrio (principio supposto parimente dal medesimo Archimede), io venga poi a dimostrarvi, come non solamente altrettanto sia vero che pesi diseguali facciano l'equilibrio in stadera di braccia diseguali secondo la proporzione di essi pesi permutatamente sospesi, ma che l'istessa cosa fa colui che colloca pesi eguali in distanze eguali, che quello che colloca pesi diseguali in distanze che abbiano permutatamente la medesima proporzione che i pesi.

Or per chiara dimostrazione di quanto dico, segno un prisma o cilindro solido AB (*Fig.* 14), sospeso dalle estremità alla linea HI, e sostenuto da due fili HA, IB. È manifesto che se io sospenderò il tutto dal filo C posto nel mezzo della bilancia HI, il prisma AB resterà equilibrato, essendo la metà del suo peso da una banda, e l'altra dall'altra del punto della sospensione C, pel principio da noi supposto. Intendasi ora il prisma esser diviso in parti diseguali per la linea D, e sia la parte DA maggiore, e la DB minore; ed acciocchè, fatta tal divisione, le parti del prisma restino nel medesimo sito e costituzione rispetto alla linea HI, soccorriamo con un filo ED, il quale fermato nel punto E sostenga le parti del prisma AD, DB; non è da dubitarsi che non si essendo fatta veruna local mutazione nel prisma rispetto alla bilancia HI, ella resterà nel medesimo stato dell'equilibrio. Ma nella medesima costituzione resterà ancora se la parte del prisma, che ora è sospesa dalle due estremità con li fili AH, DE, si appenda ad un sol filo GL posto nel mezzo, e parimente l'altra parte DB non muterà stato sospesa dal mezzo e sostenuta dal filo FM. Sciolti dunque i fili HA, ED, IB, e lasciati solo li due GL, FM, resterà l'istesso equilibrio, fatta pur sempre la sospensione dal punto C. Or qui voltiamoci a considerare come noi abbiamo due gravi AD, DB, pendenti dai termini G, F di una libra GF, nella quale si fa l'equilibrio dal punto C, in modo che la distanza della sospensione del grave AD dal punto C è la linea CG, e l'altra parte CF è la distanza dalla quale pende l'altro grave DB. Resta dunque solo da dimostrarsi, tali distanze aver la medesima proporzione tra di loro, che hanno gli stessi pesi, ma permutatamente presi, cioè che la distanza GC alla CF sia come il prisma DB al prisma DA; il che proveremo così. Essendo la linea GE la metà della EH, e la EF metà della EI, sarà tutta la GF metà di tutta la HI, e però, eguale alla CI, e trattane la parte comune CF, sarà la rimanente GC eguale alla rimanente FI, cioè alla FE, e presa comunemente la CE, saranno le due GE, CF eguali. E però, come GE ad EF, così FC a CG; ma come GE ad EF, così la doppia alla doppia, cioè HE ad EI, cioè il prisma AD al prisma DB; adun-

que per l'egual proporzione, e convertendo, come la distanza GC alla distanza CF, così il peso BD al peso DA, che è quello che io voleva provarvi. Inteso sin qui, non credo che voi porrete difficoltà in ammettere che i due prismi AD, DB facciano l'equilibrio dal punto C, perchè la metà di tutto il solido AB è alla destra della sospensione C, e l'altra metà dalla sinistra, e che così si vengono a rappresentar due pesi eguali disposti e distesi in due distanze eguali. Che poi li due prismi AD, DB ridotti in due dadi, o in due palle, o in due qual'altre si siano figure (purchè si conservino le sospensioni medesime G, F), seguitino di far l'equilibrio dal punto C, non credo che sia alcuno che ne possa dubitare, perchè troppo manifesta cosa è che le figure non mutano peso, dove si ritenga la medesima quantità di materia. Dal che possiamo raccor la general conclusione, che due pesi qualunque si siano fanno l'equilibrio da distanze permutatamente rispondenti alle lor gravità.

Stabilito dunque tal principio, avanti che passiamo più oltre, dobbiamo mettere in considerazione come queste forze, resistenze, momenti, figure, si posson considerare in astratto e separate dalla materia, ed anco in concreto e congiunte con la materia; ed in questo modo quelli accidenti che converranno alle figure considerate come immateriali, riceveranno alcune modificazioni mentre vi aggiugneremo la materia ed in conseguenza la gravità. Come per esempio, se noi intenderemo una leva, qual sarebbe questa BA (*Fig.* 15), la quale posando su il sostegno C sia applicata per sollevare il grave sasso D, è manifesto, pel dimostrato principio, che la forza posta nell'estremità B basterà per adeguare la resistenza del grave D, se il suo momento al momento di esso D abbia la medesima proporzione che ha la distanza AC alla distanza CB; e questo è vero non mettendo in considerazione altri momenti che quelli della semplice forza in B e della resistenza in D, quasi che l'istessa leva fusse immateriale e senza gravità. Ma se noi metteremo in conto la gravità ancora dello strumento stesso della leva, la quale sarà talor di legno e talvolta anco di ferro, è manifesto che alla forza in B aggiunto il peso della

leva, altererà la proporzione, la quale converrà pronunziare sotto altri termini. E però, prima che passar più oltre, è necessario che noi convenghiamo in por distinzione tra queste due maniere di considerare; chiamando un prendere assolutamente quello, quando intenderemo lo strumento preso in astratto, cioè separato dalla gravità della propria materia; ma congiugnendo con le figure semplici ed assolute la materia con la gravità ancora, nomineremo le figure congiunte con la materia momento o forza composta.

Sagr. È forza ch' io rompa il proposito che avevo di non dar occasione di digredire, ma non potrei con attenzione applicarmi al rimanente se non mi fusse rimosso certo scrupolo che mi nasce; ed è questo, che mi pare che V. S. faccia comparazione della forza posta in B con la total gravità del sasso D, della qual gravità mi pare che una parte, e forse forse la maggiore, si appoggi sopra il piano dell' orizzonte; sì che. . . .

Salv. Ho inteso benissimo. V. S. non soggiunga altro; ma solamente avverta che io non ho nominato la gravità totale del sasso, ma ho parlato del momento che egli tiene ed esercita sopra il punto A, estremo termine della leva BA, il quale è sempre minore dell' intero peso del sasso, ed è variabile secondo la figura della pietra, e secondo che ella vien più o meno sollevata.

Sagr. Resto appagato, ma mi nasce un altro desiderio, che è, che per intera cognizione mi fusse dimostrato il modo, se vi è, di potere investigare qual parte sia del peso totale quella che vien sostenuta dal soggetto piano, e quale quella che grava sul vette nell' estremità A.

Salv. Perchè posso con poche parole dargli soddisfazione, non voglio lasciar di servirla; però facendone un poco di figura (*Fig.* 16), intenda V. S. il peso, il cui centro di gravità sia A, appoggiato sopra l' orizzonte col termine B, e nell' altro sia sostenuto col vette CG, sopra il sostegno N, da una potenza posta in G; e dal centro A e dal termine C caschino perpendicolari all' orizzonte AO, CF. Dico, il momento di tutto il peso al momento della potenza in G aver la proporzion com-

posta della distanza GN alla distanza NC, e della FB alla BO. Facciasi come la linea FB alla BO, così la NC alla X, ed essendo tutto il peso A sostenuto dalle due potenze poste in B e C, la potenza B alla C è come la distanza FO alla OB; e componendo, le due potenze B, C insieme, cioè il total momento di tutto il peso A alla potenza in C è come la linea FB alla BO, cioè come la NC alla X; ma il momento della potenza in C al momento della potenza in G è come la distanza GN alla NC; adunque, per la perturbata, il total peso A al momento della potenza in G è come la GN alla X; ma la proporzione di GN alla X è composta della proporzione GN ad NC, e di quella di NC ad X, cioè di FB a BO, adunque il peso A alla potenza che lo sostiene in G ha la proporzione composta delle GN ad NC, e di quella di FB a BO, che è quello che si doveva dimostrare. Or ritornando al nostro primo proposito, intese tutte le cose sin qui dichiarate, non sarà difficile l'intender la ragione onde avvenga che un prisma o cilindro solido di vetro, acciaio, legno o altra materia frangibile, sospeso per lo lungo sosterrà gravissimo peso che gli sia attaccato, ma in traverso (come poco fa dicevamo) da minor peso assai potrà talvolta essere spezzato, secondo che la sua lunghezza eccederà la sua grossezza.

Imperocchè figuriamoci il prisma solido *senza peso* ABCD (*Fig.* 17) fitto in un muro dalla parte AB, e nell'altra estremità s'intenda la forza del peso E, *la quale sia appunto bastante a far la rottura del solido* (intendendo sempre il muro esser eretto all'orizzonte, ed il prisma o cilindro fitto nel muro ad angoli retti): è manifesto che dovendosi spezzare si romperà nel luogo B, dove il taglio del muro serve per sostegno, e la BC per la parte della leva, dove si pone la forza; e la grossezza del solido BA è l'altra parte della leva, nella quale è posta la resistenza, che consiste nello staccamento che si ha da fare della parte del solido BD, che è fuor del muro, da quella che è dentro: e per le cose dichiarate, il momento della forza E posta in C al momento della resistenza, che sta nella grossezza del prisma, cioè nell'attaccamento della base BA con la sua contigua, ha la medesima proporzione che la

lunghezza CB alla metà della BA, *essendo che il centro della resistenza BA da superarsi per traverso si riduce nel centro di gravità della sezione BA, come ancora in ogni altro solido che si voglia rompere per traverso;* e però l'assoluta resistenza all'esser rotto, che è nel prisma BD (la quale assoluta resistenza è quella che si fa col tirarlo per diritto, perchè allora tanto è il moto del movente quanto quello del mosso) alla resistenza respettiva che ha all'esser rotto con l'aiuto della leva BC, ha la medesima proporzione che la lunghezza BC alla metà di AB nel prisma, che nel cilindro è il semidiametro della sua base. E questa sia la nostra prima proposizione. E notate che questo che dico si debbe intendere rimossa la considerazione del peso proprio del solido BD, il qual solido ho preso come nulla pesante. Ma quando vorremo mettere in conto la sua gravità congiugnendola col peso E, dobbiamo al peso E aggiugnere la metà del peso del solido BC, sì che essendo, v. g., il peso di BD due libbre, e il peso di E libbre dieci, si deve pigliare il peso E come se fusse undici.

Simp. E perchè non come se fusse dodici?

Salv. Il peso E, Sig. Simplicio mio, pendente dal termine C, preme in rispetto alla leva BC con tutto il suo momento di libbre dieci, dove se fusse appeso il solo BD, graviterebbe con tutto il momento di due libbre; ma, come vedete, tal solido è distribuito per tutta la lunghezza BC uniformemente, onde le parti sue vicine all'estremità B gravitano manco delle più remote; sì che insomma ristorando quelle con queste, il peso di tutto il prisma si riduce a lavorare sotto il centro della sua gravità, che risponde al mezzo della leva BC; ma un peso pendente dalla estremità C ha momento doppio di quello che avrebbe pendendo dal mezzo; e però la metà del peso del prisma si deve aggiugnere al peso E, mentre ci serviamo del momento d'amendue, come locati nel termine C.

Simp. Resto capacissimo, e di più, s'io non m'inganno, parmi che la potenza di amendue i pesi BD ed E posti così avrebbe l'istesso momento che se tutto il peso di BD col doppio di E fusse appeso nel mezzo della leva BC.

Salv. Così è precisamente, e si deve tenere a memoria. Qui possiamo immediatamente intender come e con che proporzione resista più una verga, o vogliam dir prisma più largo che grosso, all' esser rotto, fattogli forza secondo la sua larghezza, che secondo la grossezza. Per intelligenza di che intendasi una riga AD (*Fig.* 18), la cui larghezza sia AC, e la grossezza assai minore CB; si cerca perchè, volendola romper per taglio, come nella prima figura, resisterà al gran peso T, ma posta per piatto, come nella seconda figura, non resisterà all' X minore del T; il che si fa manifesto, mentre intendiamo il sostegno essere una volta sotto la linea BC ed un' altra sotto la CA, e le distanze delle forze esser nell' un caso e nell' altro eguali, cioè la lunghezza BD. Ma nel primo caso la distanza della resistenza dal sostegno, che è la metà della linea CA, è maggiore della distanza nell' altro caso, la quale è la metà della BC; però la forza del peso T conviene che sia maggiore della X, quanto la metà della larghezza CA è maggiore della metà della grossezza BC, servendoci quella per contralleva della CA, e questa della CB per superare la medesima resistenza, che è la quantità delle fibre di tutta la base AB. Concludesi pertanto, la medesima riga o prisma più largo che grosso resister più all' esser rotto per taglio che per piatto, secondo la proporzione della larghezza alla grossezza, *non vi considerando il proprio peso dei prismi, e intendendo applicate le forze equivalenti all' estremità di lunghezze eguali.*

Conviene ora che cominciamo a investigare secondo qual proporzione vada crescendo il momento della propria gravità in relazione alla propria resistenza all' essere spezzato in un prisma o cilindro *grave*, mentre stando parallelo all' orizzonte si va allungando; il qual momento trovo andar crescendo in duplicata proporzione di quella dell' allungamento, *cioè secondo i quadrati delle lunghezze.* Per la cui dimostrazione intendasi il prisma o cilindro AD (*Fig.* 19) fitto saldamente nel muro dall' estremità A, e sia equidistante all' orizzonte; ed il medesimo intendasi allungato sino in E aggiugnendovi la parte BE. È manifesto che l' allungamento della leva AB sino in C

cresce per sè solo, cioè assolutamente preso, il momento della forza premente contro alla resistenza dello staccamento e rottura da farsi in A secondo la proporzione di CA a BA ; ma oltre a questo il peso aggiunto del solido BE al peso del solido AB cresce il momento della gravità premente secondo la proporzione del prisma AE al prisma AB, la qual proporzione è la medesima della lunghezza AC alla AB, adunque è manifesto che congiunti i due accrescimenti delle lunghezze e delle gravità, il momento composto di amendue è in doppia proporzione di qualunque di esse. Concludasi pertanto, i momenti delle forze dei prismi e cilindri *gravi* egualmente grossi, ma disegualmente lunghi, esser tra di loro in duplicata proporzione di quella delle lor lunghezze, cioè esser come i quadrati delle lunghezze.

Mostreremo adesso nel secondo luogo, secondo qual proporzione cresca la resistenza all'essere spezzati nei prismi e cilindri *senza peso*, mentre restino della medesima lunghezza e si accresca la grossezza. E qui dico che

Nei prismi e cilindri *senza peso* egualmente lunghi, ma disegualmente grossi, la resistenza all'esser rotti cresce in triplicata proporzione dei diametri delle lor grossezze, cioè delle lor basi.

I due cilindri siano questi A, B (*Fig.* 20), le cui lunghezze eguali DG, FH, le basi diseguali i cerchi, i cui diametri CD, EF. Dico la resistenza del cilindro B alla resistenza del cilindro A ad esser rotti *rasente il muro in CD* ed *EF da gravi posti nelle loro estremità G, H*, aver triplicata proporzione di quella che ha il diametro FE al diametro DC. Imperocchè se consideriamo l' assoluta e semplice resistenza che risiede nelle basi, cioè nei cerchi EF, DC, all' essere strappati facendogli forza col tirarli per diritto, non è dubbio che la resistenza del cilindro B è tanto maggiore che quella del cilindro A, quanto il cerchio EF è maggiore del CD, perchè tante più sono le fibre, i filamenti o le parti tenaci che tengono unite le parti dei solidi. Ma se consideriamo che nel far forza per traverso ci serviamo di due leve, delle quali le parti o distanze dove si applicano le forze sono le linee DG, FH, i so-

stegni sono ne' punti D, F, ma le altre parti o distanze dove son poste le resistenze sono i semidiametri dei cerchi DC, EF, perchè i filamenti sparsi per tutte le superficie dei cerchi, è come se tutti si riducessero nei centri: considerando, dico, tali leve, intenderemo la resistenza nel centro della base EF contro alla forza di H esser tanto maggiore della resistenza *nel centro* della base CD contro alla forza posta in G (e sono le forze in G ed H di leve eguali DG, FH), quanto il semidiametro FE è maggiore del semidiametro DC; cresce dunque la resistenza all'esser rotta nel cilindro B sopra la resistenza del cilindro A, secondo amendue le proporzioni dei cerchi EF, DC, e dei lor semidiametri o vogliam dir diametri: ma la proporzione dei cerchi è doppia di quella dei diametri; adunque la proporzione delle resistenze, che di quelle si compone, è triplicata della proporzione dei medesimi diametri, che è quello che si doveva provare. Ma perchè anco i cubi sono in tripla proporzione dei loro lati, possiamo similmente concludere, le resistenze dei cilindri *senza peso* egualmente lunghi esser tra di loro come i cubi dei lor diametri.

Da questo, che si è dimostrato, possiamo concludere ancora, le resistenze dei prismi e cilindri *senza peso* egualmente lunghi avere sesquialtera proporzione di quella degli stessi cilindri. Il che è manifesto, perchè i prismi e cilindri egualmente alti hanno fra di loro la medesima proporzione che le lor basi, cioè doppia dei lati o diametri di esse basi: ma le resistenze (come si è dimostrato) hanno triplicata proporzione dei medesimi lati o diametri; adunque la proporzione delle resistenze è sesquialtera della proporzione degli stessi solidi, ed in conseguenza dei pesi dei medesimi solidi.

Simp. Egli è forza che avanti che si proceda più oltre io resti sincerato di certa mia difficoltà, e questa è, che sin qui non ho sentito mettere in considerazione certa altra sorta di resistenza, la quale mi par che venga diminuita nei solidi secondo che si vanno più e più allungando, e non solo nell'uso trasversale, ma ancora per lo lungo, in quel modo appunto che vediamo una corda lunghissima esser molto

meno atta a reggere un gran peso, che se fusse corta: onde io credo che una verga di legno o di ferro più peso assai potrà reggere se sarà corta, che se sarà molto lunga; intendendo sempre usata per lo lungo, e non in traverso; ed anco messo in conto il suo proprio peso, che nella più lunga è maggiore.

SALV. Dubito, Sig. Simplicio, che in questo punto voi con molti altri v' inganniate, se però ho ben compreso il vostro concetto, sì che voi vogliate dire, che una corda lunga, v. g., quaranta braccia non possa sostenere tanto peso, quanto se fusse un braccio o due della medesima corda.

SIMP. Cotesto ho voluto dire, e sin qui mi par proposizione assai probabile.

SALV. Ma io l' ho per falsa, non che per impossibile; e credo di potervi assai agevolmente cavar di errore. Però ponghiamo questa corda AB (*Fig.* 21) fermata di sopra dal capo A, e dall' altro sia il peso C, dalla cui forza debba essa corda essere rotta. Assegnatemi voi, Sig. Simplicio, il luogo particolare dove debba seguir la rottura.

SIMP. Sia nel luogo D.

SALV. Vi domando qual sia la cagione dello strapparsi in D.

SIMP. È la causa di ciò, perchè la corda in quella parte non era potente a reggere, v. g., cento libbre di peso, quanto è la parte DB con la pietra C.

SALV. Adunque tuttavolta che tal corda nella parte D venisse violentata dalle medesime cento libbre di peso, ella lì si strapperebbe.

SIMP. Così credo.

SALV. Ma ditemi ora, chi attaccasse il medesimo peso non al fine della corda B, ma vicino al punto D, come sarebbe in E, ovvero legasse la corda non nell' altezza A, ma più vicino e sopra al punto medesimo D, come sarebbe in F, ditemi, dico, se il punto D sentirebbe il medesimo peso delle cento libbre.

SIMP. Sentirebbelo, accompagnando però il pezzo di corda EB con la pietra C.

Salv. Se dunque la corda nel punto D vien tirata dalle medesime cento libbre di peso, si romperà per la vostra concessione; e pure la FE è un piccol pezzo della lunga AB; come dunque volete più dire che la corda lunga sia più debole della corta? *Che se pur si dovesse porre qualche differenza nel più o meno resistere tra le corde lunghe e le corte, più si vedranno per diverse esperienze resister le lunghe che le corte (alle forze però fatte con moto o impeto contro le medesime corde); tra le quali esperienze se ne può addurre una sensatissima suggeritami dai discorsi avuti con chi ha navigato; ed è che le gomene delle navi, per ritenere (come dicono) sull'ancora il navilio contro all'agitazione delle onde marine, si usano lasciarle lunghissime; e questo credo acciò piegate dal proprio peso faccciano gran sacco, e però vadano dolcemente ricevendo e secondando le strappate del vascello agitato, le quali più duramente ed aspramente da una gomena corta, che meno si piegherebbe, sarebbero ricevute; in quella maniera che veggiamo la medesima percossa assai meno operar in una materia cedente, che in una più resistente.* Contentatevi dunque di esser cavato di un errore, nel quale avete avuto molti compagni, ed anco per altro molto intelligenti: e seguitiamo innanzi. Ed avendo dimostrato, i prismi e cilindri *gravi* crescere il lor momento sopra le proprie resistenze secondo i quadrati delle lunghezze loro (mantenendo però sempre la medesima grossezza); e parimente gli egualmente lunghi, ma differenti in grossezza, crescer le lor resistenze secondo la proporzione dei cubi dei lati o diametri delle lor basi, passiamo a investigare quello che accaggia a tali solidi differenti in lunghezza e grossezza, nei quali io osservo, che

Dei prismi e cilindri di diversa lunghezza e grossezza, *e senza peso*, le resistenze all'esser rotti *da pesi applicati alla estremità loro* hanno proporzione composta della proporzione dei cubi de' diametri delle lor basi e della proporzione delle lor lunghezze permutatamente prese.

Siano tali due cilindri questi ABC, DEF (*Fig.* 22). Dico, la resistenza del cilindro AC alla resistenza del cilindro DF, aver

la proporzione composta della proporzione del cubo del diametro AB al cubo del diametro DE, e della proporzione della lunghezza EF alla lunghezza BC. Pongasi la EG eguale alla BC, e delle linee AB, DE sia terza proporzionale la H, e quarta la I, e come la EF alla BC così sia la I alla S. E perchè la resistenza del cilindro AC alla resistenza del cilidro DG è come il cubo AB al cubo DE, cioè come la linea AB alla linea I, e la resistenza del cilindro GD alla resistenza del cilindro DF come la lunghezza FE alla EG, cioè come la linea I alla S; adunque per l'egual proporzione, come la resistenza del cilindro AC alla resistenza del cilindro DF, così la linea AB alla S; ma la linea AB alla S ha la proporzion composta della AB alla I e della I alla S, adunque la resistenza del cilindro AC alla resistenza del cilindro DF ha la proporzion composta della AB alla I, cioè del cubo di AB al cubo di DE, e della proporzione della linea I alla S, cioè della lunghezza EF alla lunghezza BC, che è quello che io intendeva di dimostrare.

Dopo la dimostrata proposizione, voglio che consideriamo quello che accaggia tra i cilindri e prismi simili, dei quali dimostreremo, come

Dei cilindri, e prismi simili i momenti composti, cioè risultanti dalle lor gravità e dalle loro lunghezze, che sono come leve, hanno tra di loro proporzione sesquialtera di quella che hanno le resistenze delle medesime lor basi.

Per lo che dimostrare segniamo i due cilindri simili AB, CD (*Fig* 23). Dico, il momento del cilindro AB per superare la resistenza della sua base B, al momento di CD per superare la resistenza della sua D, aver sesquialtera proporzione di quella che ha la medesima resistenza della base B alla resistenza della base D; e perchè i momenti dei solidi AB, CD per superar le resistenze delle lor basi B, D son composti delle lor gravità e delle forze delle lor leve, e la forza della leva AB è eguale alla forza della leva CD, e questo perchè la lunghezza AB al semidiametro della base B ha la medesima proporzione (per la similitudine de' cilindri) che

la lunghezza CD al semidiametro della base D, resta che il momento totale del cilindro AB al momento totale di CD sia come la sola gravità del cilindro AB alla sola gravità del cilindro CD, cioè come l'istesso cilindro AB all'istesso CD: ma questi sono in triplicata proporzione dei diametri delle basi loro B, D, e le resistenze delle medesime basi essendo tra di loro come l'istesse basi, sono in conseguenza in duplicata proporzione dei medesimi loro diametri; adunque i momenti dei cilindri sono in sesquialtera proporzione delle resistenze delle basi loro.

Simp. Questa proposizione mi è veramente giunta non solamente nuova ma inaspettata, e nel primo aspetto assai remota dal giudizio che io ne averei congbietturalmente fatto: imperocchè essendo tali figure in tutto il restante simili, avrei tenuto per fermo che anco i momenti loro verso le proprie resistenze avessero ritenuta la medesima proporzione.

Sagr. Questa è la dimostrazione di quella proposizione, che nel principio de' nostri ragionamenti dissi parermi di scorger per ombra.

Salv. Quello, che ora accade al Sig. Simplicio, avvenne per alcun tempo a me, credendo che le resistenze di solidi simili fusser simili, sin che certa, nè anche molto fissa o accurata osservazione mi parve rappresentarmi, nei solidi simili non mantenersi un tenore eguale nelle loro robustezze, ma i maggiori esser meno atti a patire gli eventi violenti, come rimaner più offesi dalle cadute gli uomini grandi che i piccoli fanciulli, e, come da principio dicevamo, cadendo dalla medesima altezza vedesi andare in pezzi una gran trave o una colonna, ma non così un piccolo corrente o un piccolo cilindro di marmo. Questa tal quale osservazione mi destò la mente all'investigazione di quello che ora son per dimostrarvi: proprietà veramente ammirabile, poichè tra le infinite figure solide simili tra di loro pur due non ve ne sono, i momenti delle quali verso lè proprie resistenze ritengano la medesima proporzione.

Simp. Ora mi fate sovvenire non so che, posto da Ari-

stotile tra le sue questioni meccaniche, mentre vuol render la ragione onde avvenga che i legni quanto più son lunghi tanto più son deboli e più e più si piegano, benchè i più corti siano più sottili, e i lunghi più grossi, e se io ben mi ricordo, ne riduce la ragione alla semplice leva.

SALV. È verissimo; e perchè la soluzione non par che tolga interamente la ragion del dubitare, Monsignor di Guevara, il quale veramente con i suoi dottissimi comentari ha altamente nobilitata e illustrata quell'opera, si estende con altre più acute speculazioni per isciorre tutte le difficoltà, restando però esso ancora perplesso in questo punto, se crescendosi con la medesima proporzione le lunghezze e le grossezze di tali solide figure, si debba mantenere l'istesso tenore nelle loro rubustezze e resistenze nell'esser rotti ed anco nel piegarsi. Io, dopò un lungo pensarvi, ho in questa maniera ritrovato quello che seguentemente son per apportarvi. E prima dimostrerò, che

Dei prismi o cilindri simili gravi un solo e unico è quello che si riduce (gravato dal proprio peso) all'ultimo stato tra lo spezzarsi e il sostenersi intero: sì che ogni maggiore, come impotente a resistere al proprio peso, si romperà, e ogni minore resiste a qualche forza che gli venga fatta per romperlo.

Sia il prisma grave AB (*Fig.* 24) ridotto alla somma lunghezza di sua consistenza, sì che allungato un minimo di più si rompesse. Dico questo essere unico tra tutti i suoi simili (che pur sono infiniti) atto ad esser ridotto in tale stato ancipite, sì che ogni maggiore, oppresso dal proprio peso, si spezzerà, ed ogni minore, no, anzi potrà resistere a qualche aggravio di nuova violenza, oltre a quella del proprio peso. Sia il prisma CE simile e maggiore di AB. Dico, questo non poter consistere, ma rompersi superato dalla propria gravità. Pongasi la parte CD lunga quanto AB. E perchè la resistenza di CD a quella di AB è come il cubo della grossezza di CD al cubo della grossezza di AB, cioè come il prisma CE al prisma AB (essendo simili), adunque il peso di CE è il sommo che possa esser sostenuto nella lunghezza del prisma

CD; ma la lunghezza CE è maggiore; adunque il prisma CE si romperà. Ma sia FG minore: si dimostrerà similmente (posta FH eguale alla BA) la resistenza di FG a quella di AB esser come il prisma FG al prisma AB, quando la distanza AB, cioè FH, fusse eguale alla FG: ma è maggiore; adunque il momento del prisma FG posto in G non basta per rompere il prisma FG.

Sagr. Chiarissima e breve dimostrazione, concludente la verità e necessità di una proposizione che nel primo aspetto sembra assai remota dal verisimile. Bisognerebbe dunque alterare assai la proporzione tra la lunghezza e la grossezza del prisma maggiore con l'ingrossarlo o scorciarlo, acciò si riducesse allo stato ancipite tra il reggersi e lo spezzarsi, e l'investigazione di tale stato penso che potesse essere altrettanto ingegnosa.

Salv. Anzi più presto d'avvantaggio, come anco più laboriosa, ed io lo so, che vi spesi non piccol tempo per ritrovarla, ed ora voglio parteciparvela.

Dato dunque un cilindro o prisma *con peso* di massima lunghezza da non esser dal suo proprio peso spezzato, e data una lunghezza maggiore, trovar la grossezza d'un altro cilindro o prisma, che sotto la data lunghezza sia l'unico e massimo resistente al proprio peso.

Sia il cilindro BC (*Fig.* 25) massimo resistente al proprio peso, e sia la DE lunghezza maggiore della AC: bisogna trovare la grossezza del cilindro, che sotto la lunghezza DE sia il massimo resistente al proprio peso. Sia delle lunghezze DE, AC terza proporzionale I, e come DE ad I, così sia il diametro FD al diametro BA, e facciasi il cilindro FE. Dico, questo essere il massimo ed unico tra tutti i suoi simili resistente al proprio peso. Delle linee DE ed I sia terza proporzionale M, e quarta O; e pongasi FG eguale alla AC. E perchè il diametro FD al diametro AB è come la linea DE alla I, e delle DE ed I la O è quarta proporzionale, il cubo di FD al cubo di BA sarà come la DE alla O; ma come il cubo di FD al cubo di BA, così è la resistenza del cilindro DG alla resistenza del cilindro BC; adunque la resistenza del cilindro DG a quella

del cilindro BC è come la linea DE alla O. E perchè il momento del cilindro BC è eguale alla sua resistenza, se si mostrerà il momento del cilindro FE al momento del cilindro BC esser come la resistenza DF alla resistenza BA, cioè come il cubo di FD al cubo di BA, cioè come la linea DE alla O, avremo l' intento, cioè il momento del cilindro FE esser eguale alla resistenza posta in FD. Il momento del cilindro FE al momento del cilindro DG è come il quadrato della DE al quadrato della AC, cioè come la linea DE alla I; ma il momento del cilindro DG al momento del cilindro BC è come il quadrato DF al quadrato BA, cioè come il quadrato di DE al quadrato della I, cioè come il quadrato della I al quadrato della M, cioè come la I alla O; adunque, per l' egual proporzione, come il momento del cilindro FE al momento del cilindro BC, così è la linea DE alla O, cioè il cubo DF al cubo BA, cioè la resistenza della base DF alla resistenza della base BA, che è quello che si cercava.

Sagr. Questa, Sig. Salviati, è una lunga dimostrazione, e molto difficile a ritenersi a memoria per sentirla una sola volta; onde io vorrei che V. S. si contentasse di replicarla di nuovo.

Salv. Farò quanto V. S. comanda, ma forse sarebbe meglio arrecarne una più speditiva e breve: ma converrà fare una figura alquanto diversa.

Sagr. Maggiore sarà il favore, e la già dichiarata mi farà grazia darmela scritta, acciò a mio bell' agio possa ristudiarla.

Salv. Non mancherò di servirla. Ora intendiamo un cilindro A (*Fig.* 26), il diametro della cui base sia la linea DC, e sia questo A il massimo che possa sostenersi; del quale vogliamo trovare un maggiore, che pur sia il massimo esso ancora ed unico che si sostenga. Intendiamone un simile ad esso A, e lungo quanto la linea assegnata, e questo sia, v. g., E, il diametro della cui base sia la KL, e delle due linee DC, KL sia terza proporzionale la MN, che sia diametro della base del cilindro X, di lunghezza eguale all' E. Dico, questo X esser quello che cerchiamo. E perchè la resistenza DC alla resi-

stenza KL è come il quadrato DC al quadrato KL, cioè come il quadrato KL al quadrato MN, cioè come il cilindro E al cilindro X, cioè come il momento E al momento X; ma la resistenza KL alla MN è come il cubo di KL al cubo di MN, cioè come il cubo DC al cubo KL, cioè come il cilindro A al cilindro E, cioè come il momento A al momento E; adunque, per l'analogia perturbata, come la resistenza DC alla MN, così il momento A al momento X; adunque il prisma X è nella medesima costituzione di momento e resistenza che il prisma A.

Ma voglio che facciamo il problema più generale, e la proposizione sia questa.

Dato il cilindro AC, qualunque si sia il suo momento verso la sua resistenza, e data qualsisia lunghezza DE, trovar la grossezza del cilindro, la cui lunghezza sia DE, e il suo momento verso la sua resistenza ritenga la medesima proporzione che il momento del cilindro AC alla sua.

Ripresa l'istessa figura di sopra (*Fig.* 25), e quasi l'istesso progresso, diremo. Perchè il momento del cilindro FE al momento della parte DG, ha la medesima proporzione che il quadrato ED al quadrato FG, cioè che la linea DE alla I, ed il momento del cilindro DG al momento del cilindro AC è come il quadrato FD al quadrato AB, cioè come il quadrato DE al quadrato I, cioè come il quadrato I al quadrato M, cioè come la linea I alla O; adunque ex aequali il momento del cilindro FE al momento del cilindro AC ha la medesima proporzione della linea DE alla O, cioè del cubo DE al cubo I, cioè del cubo di FD al cubo di AB, cioè della resistenza della della base FD alla resistenza della base AB, che è quello che si doveva fare.

Or vedano come dalle cose sin qui dimostrate apertamente si raccoglie l'impossibilità del poter non solamente l'arte, ma la natura stessa crescer le sue macchine a vastità immensa, sì che impossibil sarebbe fabbricar navigli, palazzi o templi vastissimi, li cui remi, antenne, travamenti, catene di ferro, ed insomma le altre lor parti consistessero;

come anco non potrebbe la natura far alberi di smisurata grandezza, poichè i rami loro gravati dal proprio peso finalmente si fiaccherebbero; e parimente sarebbe impossibile far strutture di ossa per uomini, cavalli o altri animali che potessero sussistere e far proporzionatamente gli uffizi loro, mentre tali animali si dovessero augumentare ad altezze immense, se già non si togliesse materia molto più dura e resistente della consueta, o non si deformassero tali ossi sproporzionatamente ingrossandoli, onde poi la figura ed aspetto dell'animale ne riuscisse mostruosamente grosso: il che forse fu avvertito dal mio accortissimo Poeta, mentre descrivendo un grandissimo gigante disse:

Non si può compartir quanto sia lungo,
Si smisuratamente è tutto grosso.

E per un breve esempio di questo che dico, disegnai già la figura di un osso allungato solamente tre volte, ed ingrossato con tal proporzione, che potesse nel suo animale grande far l'uffizio proporzionato a quel dell' osso minore nell' animal più piccolo, e le figure son queste (*Fig.* 27), dove vedete sproporzionata figura che diviene quella dell' osso ingrandito. Dal che è manifesto che chi volesse mantenere in un vastissimo gigante le proporzioni che hanno le membra in un uomo ordinario, bisognerebbe o trovar materia molto più dura e resistente per formare le ossa, ovvero ammettere che la robustezza sua fusse a proporzione assai più fiacca che negli uomini di statura mediocre; altrimente, crescendoli a smisurata altezza, si vedrebbono dal proprio peso opprimere e cadere. Dove che all' incontro si vede, nel diminuire i corpi non si diminuir con la medesima proporzione le forze, anzi nei minori crescer la gagliardia con proporzion maggiore. Onde io credo che un piccolo cane porterebbe addosso due o tre cani eguali a sè, ma non penso già che un cavallo portasse nè anco un solo cavallo a sè stesso eguale.

Simp. Ma se così è, grand' occasione mi danno di dubitare le moli immense che vediamo nei pesci, che tal balena, per quanto intendo, sarà grande per dieci elefanti, e pur si sostengono.

Salv. Il vostro dubbio, Sig. Simplicio, mi fa accorgere d'una condizione da me non avvertita prima, potente essa ancora a far che giganti ed altri animali vastissimi potessero consistere e agitarsi non meno che i minori; e ciò seguirebbe quando non solo si aggiugnesse gagliardia all'ossa ed all'altre parti, officio delle quali è il sostenere il proprio e il sopravvegnente peso, ma, lasciata la struttura delle ossa con le medesime proporzioni pur nell'istesso modo, anzi più agevolmente consisterebbono le medesime fabbriche quando con certa proporzione si diminuisse la gravità della materia delle medesime ossa, e quella della carne o di altro che sopra l'ossa si abbia ad appoggiare; e di questo secondo artifizio si è prevalsa la natura nella fabbrica dei pesci, facendogli le ossa e le polpe non solamente assai leggiere, ma senza veruna gravità.

Simp. Veggo ben, Signor Salviati, dove tende il vostro discorso: voi volete dire, che per essere l'abitazione dei pesci l'elemento dell'acqua, la quale per la sua corpulenza, o, come altri vogliono, per la sua gravità, scema il peso ai corpi che in quella si demergono, per tal ragione la materia dei pesci non pesando, può senza aggravio dell'ossa loro esser sostenuta; ma questo non basta, perchè quando bene il resto della sustanza del pesce non graviti, gravita però senza dubbio la materia dell'ossa loro. E chi dirà che una costola di balena, grande quanto una trave, non pesi assaissimo, e nell'acqua non vada al fondo? queste dunque non doveriano poter sussistere in sì vasta mole.

Salv. Voi acutamente opponete, e per risposta al vostro dubbio ditemi se avete osservato stare i pesci, quando piace loro, sott'acqua immobili, e non discendere verso il fondo, o sollevarsi alla superficie senza far qualche forza col nuoto?

Simp. Questa è chiarissima osservazione.

Salv. Questo dunque potersi i pesci fermare come immobili a mezz'acqua è concludentissimo argomento, il composto della lor mole corporea agguagliar la gravità in ispezie dell'acqua, sì che se in essi si trovano alcune parti più gravi dell'acqua, necessariamente bisogna che ve ne siano altre altrettanto men gravi, acciò si possa pareggiar l'equilibrio. Se

dunque le ossa son più gravi, è necessario che le polpe, o altre materie che vi siano, sian più leggiere, e queste si opporranno con la lor leggerezza al peso dell'ossa; talchè negli acquatici avverrà l'opposito di quel che accade negli animali terrestri, cioè che in questi tocchi all'ossa a sostenere il peso proprio e quel della carne, e in quelli la carne regga la gravezza propria e quella dell'ossa. E però deve cessar la maraviglia, come nell'acqua possano essere animali vastissimi, ma non sopra la terra, cioè nell'aria.

Simp. Resto appagato, e di più noto che questi, che noi addimandiamo animali terrestri, più ragionevolmente si dovrebbero dimandare aerei, perchè nell'aria veramente vivono, e dall'aria son circondati e dell'aria respirano.

Sagr. Piacemi il discorso del Sig. Simplicio col suo dubbio e con la soluzione. E di più comprendo assai facilmente che uno di questi smisurati pesci tirato in terra forse non si potrebbe per lungo tempo sostenere, ma che relassate le attaccature dell'ossa, la sua mole si ammaccherebbe.

Salv. Io per ora inclino a creder l'istesso; nè son lontano a credere che il medesimo avverrebbe a quel vastissimo naviglio, il quale galleggiando in mare non si dissolve pel peso e carico di tante merci ed armamenti, che in secco, e circondato dall'aria, forse si aprirebbe. Ma seguitiamo la nostra materia, e dimostriamo come

Dato un prisma o cilindro col suo peso, ed il peso massimo sostenuto da esso, trovare la massima lunghezza, oltre alla quale prolungato, dal solo suo proprio peso si romperebbe.

Sia dato il prisma AC (*Fig.* 28) col suo proprio peso, e dato parimente il peso D, massimo da poter esser sostenuto dall'estremità C, bisogna trovare la lunghezza massima, sino alla quale si possa allungare il detto prisma senza rompersi. Facciasi, come il peso del prisma AC al composto dei pesi AC col doppio del peso di D, così la lunghezza CA alla AH, tra le quali sia media proporzionale la AG. Dico AG esser la lunghezza cercata; imperocchè il momento gravante del peso D in C è eguale al momento del peso doppio di D, che fusse posto nel

mezzo di AC, dove è anco il centro del momento del prisma AC: il momento dunque della resistenza del prisma AC, che sta in A, equivale al gravante del doppio del peso D col peso AC, attaccati però nel mezzo di AC. E perchè viene ad essersi fatto, come il momento di detti pesi così situati, cioè del doppio D con AC, al momento di AC, così la HA alla AC, tra le quali è media la AG; adunque il momento del doppio D col momento AC al momento AC è come il quadrato GA al quadrato AC: ma il momento premente del prisma GA al momento di AC è come il quadrato GA al quadrato AC; adunque la lunghezza AG è la massima che si cercava, cioè quella sino alla quale allungandosi il prisma AC si sosterrebbe, ma più oltre si spezzerebbe.

Sin qui si son considerati i momenti e le resistenze dei prismi e cilindri solidi, l'una estremità dei quali sia posta immobile, e solo nell'altra sia applicata la forza di un peso premente, considerandolo esso solo, ovver congiunto con la gravità del medesimo solido, o veramente la sola gravità dell'istesso solido. Ora voglio che discorriamo alquanto dei medesimi prismi e cilindri quando fussero sostenuti da amendue l'estremità, ovvero che sopra un sol punto, preso tra le estremità, fusser posati. E prima dico che il cilindro, che gravato dal proprio peso sarà ridotto alla massima lunghezza, oltre alla quale più non si sosterrebbe, o sia retto nel mezzo da un solo sostegno, ovvero da due nell'estremità, potrà esser lungo il doppio di quello che sarebbe fitto nel muro, cioè sostenuto in un sol termine. Il che per sè stesso è assai manifesto; perchè se intenderemo del cilindro che io segno ABC (*Fig.* 29) la sua metà AB esser la somma lunghezza potente a sostenersi stando fissa nel termine B, nell'istesso modo si sosterrà se posata sopra il sostegno G sarà contrappesata dall'altra sua metà BC. E similmente, se del cilindro DEF la lunghezza sarà tale, che solamente la sua metà DE potesse sostenersi fissa nel termine D, ed in conseguenza l'altra EF fissa nel termine F, è manifesto che posti i sostegni H, I sotto l'estremità D, F, ogni momento che si aggiunga di forza o di peso *nel mezzo*, in E, quivi si farà la rottura.

Quello che ricerca più sottile specolazione è quando, astraendo dalla gravità propria di tali solidi, ci fusse proposto di dovere investigare se quella forza o peso che, applicato al mezzo di un cilindro sostenuto nelle estremità, basterebbe a romperlo, potrebbe far l'istesso effetto applicato in qualsivoglia altro luogo più vicino all'una che all'altra estremità. Come, per esempio, se volendo noi rompere una mazza, presala con le mani nell'estremità, ed appuntato il ginocchio in mezzo, l'istessa forza che basterebbe usare per romperla in tal modo, basterebbe ancora quando il ginocchio si puntasse non nel mezzo, ma più vicino all'un degli estremi.

Sagr. Parmi che il problema sia toccato da Aristotile nelle sue questioni meccaniche.

Salv. Il quesito d'Aristotile non è precisamente l'istesso, perchè ei non cerca altro, se non di render la ragione perchè manco fatica si ricerchi a romperlo tenendo le mani nell'estremità del legno, cioè remote assai dal ginocchio, che se le tenessimo vicine, e ne rende una ragione generale, riducendo la causa alle leve più lunghe, quando s'allargano le braccia afferrando l'estremità. Il nostro quesito aggiugne qualche cosa di più, ricercando se, posto il ginocchio nel mezzo o in altro luogo, tenendo pur le mani sempre nell'estremità, la medesima forza serva in tutti i siti.

Sagr. Nella prima apprensione parrebbe di sì, attesochè le due leve mantengono in certo modo il medesimo momento, mentre quanto si scorcia l'una tanto s'allunga l'altra.

Salv. Or vedete quanto sono in pronto l'equivocazioni, e con quanta cautela e circospezione conviene andar per non v'incorrere. Cotesto che voi dite, e che veramente nel primo aspetto ha tanto del verisimile, in ristretto poi è tanto falso, che quando il ginocchio, che è il fulcimento delle due leve, sia posto o non posto nel mezzo, fa tal diversità, che di quella forza che basterebbe per far la frazione nel mezzo, dovendola fare in qualche altro luogo, talvolta non basterà l'applicarvene quattro volte tanto, nè dieci, nè cento, nè mille. Faremo sopra ciò una tal quale considerazion generale, e poi verremo alla specifica determinazione della proporzione,

secondo la quale si vanno variando le forze per far la frazione più in un punto che in un altro.

Segniamo prima questo legno AB (*Fig.* 30) da rompersi nel mezzo sopra il sostegno C, ed appresso segniamo l'istesso, ma sotto i caratteri DE, da rompersi sopra il sostegno F remoto dal mezzo. Prima, è manifesto che sendo le distanze AC, CB eguali la forza sarà compartita egualmente nelle estremità B, A. Secondo, poichè la distanza DF diminuisce dalla distanza AC, il momento della forza posta in D scema dal momento in A, cioè posto nella distanza CA, e scema secondo la proporzione della linea DF alla AC, ed in conseguenza bisogna crescerlo per pareggiare o superar la resistenza di F; ma la distanza DF si può diminuire in infinito in relazione alla distanza AC; adunque bisogna poter crescere in infinito la forza da applicarsi in D per pareggiar la resistenza in F. Ma all'incontro, secondo che cresce la distanza FE sopra CB, convien diminuire la forza in E per pareggiare la resistenza in F; ma la distanza FE in relazione alla CB non si può crescere in infinito col ritirare il sostegno F verso il termine D, anzi nè anco il doppio; adunque la forza in E per pareggiare la resistenza in F sarà sempre più che la metà della forza in B. Comprendesi dunque la necessità del doversi augumentare i momenti del congiunto delle forze in E, D infinitamente per pareggiare o superar la resistenza posta in F, secondo che il sostegno F s'andrà approssimando verso l'estremità D.

Sagr. Che diremo, Sig. Simplicio? non convien egli confessare, la virtù della geometria essere il più potente strumento d'ogni altro per acutir l'ingegno e disporlo al perfettamente discorrere e specolare, e che con gran ragione voleva Platone i suoi scolari prima ben fondati nelle matematiche? Io benissimo aveva compreso la facultà della Leva, e come crescendo o scemando la sua lunghezza cresceva o calava il momento della forza e della resistenza; contuttociò nella determinazione del presente problema m'ingannava, e non di poco, ma d'infinito.

Simp. Veramente comincio a comprendere che la logica, benchè strumento prestantissimo per regolare il nostro di-

scorso, non arriva, quanto al destar la mente, all' invenzione e all' acutezza della geometria.

SAGR. A me pare che la logica insegni a conoscere se i discorsi e le dimostrazioni già fatte e trovate procedono concludentemente, ma che ella insegni a trovare i discorsi e le dimostrazioni concludenti, ciò veramente non credo io. Ma sarà meglio che il Sig. Salviati ci mostri, secondo qual proporzione vadan crescendo i momenti delle forze per superar la resistenza del medesimo legno, secondo i luoghi diversi della rottura.

SALV. La proporzione, che ricercate, procede in cotal forma, che

Se nella lunghezza d'un cilindro si noteranno due luoghi, sopra i quali si voglia far la frazione di esso cilindro, le resistenze di detti due luoghi hanno fra di loro la medesima proporzione che i rettangoli fatti dalle distanze di essi luoghi contrariamente presi.

Sieno le forze AB (*Fig.* 31) minime per rompere in C, e le E, F parimente le minime per rompere in D. Dico le forze A, B alle forze E, F aver la proporzion medesima che ha il rettangolo ADB al rettangolo ACB. Imperocchè le forze A, B alle forze E, F hanno la proporzion composta delle forze A, B alla forza B, della B alla F, e della F alle F, E. Ma come le forze A, B alla forza B, così sta la lunghezza BA ad AC, e come la forza B alla F, così sta *reciprocamente* la linea DB alla BC, e come la forza F alle F, E, così sta la linea DA alla AB, adunque le forze A, B alle forze E, F hanno la proporzion composta delle tre, cioè della retta BA ad AC, della DB a BC, e della DA ad AB; ma delle due DA ad AB, ed AB ad AC, si compone la proporzione della DA ad AC; adunque le forze A, B alle forze E, F hanno la proporzion composta di questa DA ad AC, e dell' altra DB a BC; ma il rettangolo ADB al rettangolo ACB ha la proporzion composta delle medesime DA ad AC, e DB a BC; adunque le forze A, B alle E, F stanno come il rettangolo ADB al rettangolo ACB, che è quanto a dire la resistenza in C ad essere spezzato alla resistenza ad esser rotto in D aver la medesima proporzione

che il rettangolo ADB al rettangolo ACB, che è quello che si doveva provare.

In conseguenza di questo teorema possiamo risolvere un problema assai curioso; ed è:

Dato il peso massimo, retto dal mezzo di un cilindro o prisma, dove la resistenza è minima, e dato un peso maggior di quello, trovare nel detto cilindro il punto nel quale il dato peso maggiore sia retto come peso massimo.

Abbia (*Fig.* 32) il dato peso, maggiore del peso massimo, retto dal mezzo del cilindro AB, ad esso massimo la proporzione della linea E alla F, bisogna trovare il punto nel cilindro, dal quale il dato peso venga sostenuto come massimo. Tra le due E, F sia media proporzionale la G, e come la E alla G, così si faccia la AD alla S; sarà la S minore della AD. Sia AD diametro del mezzo cerchio AHD, nel quale pongasi la AH eguale alla S, e congiungasi HD, e ad essa si tagli eguale la DR. Dico il punto R essere il cercato, dal quale il dato peso maggior e del massimo, retto dal mezzo del cilindro D, verrebbe come massimo retto. Sopra la lunghezza BA facciasi il mezzo cerchio ANB, e si alzi la perpendicolare RN, e congiungasi ND. E perchè i due quadrati NR, RD sono eguali al quadrato ND, cioè al quadrato AD, cioè alli due AH, HD, e l' HD è eguale al quadrato DR, adunque il quadrato NR, cioè il rettangolo ARB, sarà eguale al quadrato AH, cioè al quadrato S; ma il quadrato S al quadrato AD è come la F alla E, cioè come il peso massimo retto in D al dato peso maggiore; adunque questo maggiore sarà retto in R come il massimo che vi possa esser sostenuto; che è quello che si cercava.

Sagr. Intendo benissimo, e vo considerando che essendo il prisma AB sempre più gagliardo e resistente alla pressione nelle parti che più e più si allontanano dal mezzo, nelle travi grandissime e gravi se ne potrebbe levar non piccola parte verso l' estremità con notabile alleggerimento di peso, che nei travamenti di grandi stanze sarebbe di comodo ed utile non piccolo. E bella cosa sarebbe il ritrovar quale figura dovrebbe aver quel tal solido, che in tutte le sue parti fusse egual-

mente resistente; tal che, *sostenuto alle sue estremità*, non più facile fusse ad esser rotto da un peso che lo premesse nel mezzo, che in qualsivoglia altro luogo.

Salv. Già era in procinto di dirvi cosa assai notabile e vaga in questo proposito. Fo un poco di figura per meglio dichiararmi (*Fig.* 33). Questo DB è un prisma *senza peso*, la cui resistenza ad essere spezzato nell' estremità AD da una forza premente nel termine B è tanto minore della resistenza che si troverebbe nel luogo CI, quanto la lunghezza CB è minore della BA, come già si è dimostrato. Intendasi adesso il medesimo prisma segato diagonalmente secondo la linea FB, sì che le facce opposte siano due triangoli, uno dei quali verso noi è questo FAB. Ottiene tal solido contraria natura del prisma, cioè che meno resiste all'essere spezzato sopra il termine C che sopra l'A dalla forza posta in B, quanto la lunghezza CB è minore della BA, il che facilmente proveremo; perchè intendendo il taglio CNO parallelo all' altro AFD, la linea FA alla CN nel triangolo FAB avrà la medesima proporzione che la linea AB alla BC, e però se noi intenderemo nei punti A, C essere i sostegni di due leve, le cui distanze BA, AF, BC, CN, queste saranno simili, e però quel momento che ha la forza posta in B con la distanza BA sopra la resistenza posta nella distanza AF, l' avrà la medesima forza in B con la distanza BC sopra la medesima resistenza, che fusse posta nella distanza CN: ma la resistenza da superarsi nel sostegno C, posta nella distanza CN, dalla forza in B, è minore della resistenza in A tanto quanto il rettangolo CO è minore del rettangolo AD, cioè quanto la linea CN è minore della AF, cioè la CB della BA; adunque la resistenza della parte OCB ad esser rotta in C è tanto minore della resistenza dell' intero DAB ad esser rotto in A, quanto la lunghezza CB è minore della AB. Abbiamo dunque nel trave o prisma DB, levatone una parte, cioè la metà, segandolo diagonalmente, e lasciato il cuneo o prisma triangolare FBA, due solidi *dell' istessa materia e senza peso*, di condizioni contrarie, cioè che quello tanto più resiste quanto più si scorcia, e questo nello scorciarsi perde altrettanto di robustezza. Ora stante

questo, par ben ragionevole, anzi pur necessario, che se gli possa dare un taglio, per lo quale, togliendo via il superfluo rimanga un solido di figura tale, che in tutte le sue parti sia egualmente resistente.

Simp. È ben necessario che dove si passa dal maggiore al minore, s' incontri ancora l' eguale.

Sagr. Ma il punto sta ora a trovar come si ha da guidar la sega per far questo taglio.

Simp. Questo mi si rappresenta che dovrebbe esser opera assai facile, perchè se col segar il prisma diagonalmente, levandone la metà, la figura che resta ritien contraria natura a quella del prisma intero, sì che in tutti i luoghi, nei quali questo acquistava robustezza, quella altrettanto la perdeva, parmi che tenendo la via del mezzo, cioè levando solamente la metà di quella metà, che è la quarta parte del tutto, la rimanente figura non guadagnerà, nè perderà robustezza in tutti quei medesimi luoghi, nei quali la perdita e il guadagno dell' altre due figure erano sempre eguali.

Salv. Voi, Sig. Simplicio, non avete dato nel segno: e sì come io vi mostrerò, vedrete veramente che quello che si può segar del prisma, e levar via senza indebolirlo, non è la sua quarta parte, ma la terza. Ora resta (che è quello che accennava il Sig. Sagredo) il ritrovar secondo che linea si deve far camminar la sega; la quale proverò che deve esser linea parabolica. Ma prima è necessario dimostrare certo lemma, che è tale:

Se saranno due Libre o Leve divise dai loro sostegni in modo, che le due distanze, dove si hanno a costituire le potenze, abbiano tra di loro doppia proporzione delle distanze dove saranno le resistenze, le quali resistenze siano tra loro come le lor distanze, le potenze sostenenti saranno eguali.

Siano due leve AB, CD (*Fig.* 34) divise sopra i lor sostegni E, F, talmente che la distanza EB alla FD abbia doppia proporzione di quella che ha la distanza EA alla FC, *le quali distanze siano fra loro come le resistenze poste in A e in C.* Dico le potenze che in B, D sosterranno le resistenze di A, C, es-

ser tra loro eguali. Pongasi la EG media proporzionale tra EB e FD: sarà dunque come BE ad EG, così GE ad FD, ed AE a CF, e così si è posto esser la resistenza di A alla resistenza di C. E perchè come EG ad FD, così AE a CF, sarà, permutando, come GE ad EA così DF ad FC; e però (per esser le due leve DC, GA divise proporzionalmente nei punti F, E) quando la potenza, che posta in D pareggia la resistenza C, fusse in G, pareggerebbe la medesima resistenza di C posta in A; ma per lo dato la resistenza di A alla resistenza di C ha la medesima proporzione che la AE alla CF, cioè che la BE alla EG, adunque la potenza G, o vogliam dire D, posta in B, sosterrà la resistenza posta in A. Che è quello che si doveva provare.

Inteso questo: nella faccia FB del prisma DB *senza peso* (*Fig.* 35) sia segnata la linea parabolica FNB, il cui vertice B, secondo la quale sia segato esso prisma, restando il solido compreso dalla base AD dal piano rettangolo AG dalla linea retta BG e dalla superficie DGBF incurvata secondo la curvità della linea parabolica FNB. Dico tal solido esser per tutto egualmente resistente. Sia segato dal piano CO parallelo all'AD, e intendansi due leve divise e posate sopra i sostegni A, C, e siano dell'una le distanze BA, AF, e dell'altra le BC, CN. E perchè nella parabola FBA la AB alla BC sta come il quadrato della FA al quadrato di CN, è manifesto la distanza BA dell'una leva alla distanza BC dell'altra aver doppia proporzione di quella che ha l'altra distanza AF all'altra CN. E perchè la resistenza da pareggiarsi con la leva BA alla resistenza da pareggiarsi con la leva BC ha la medesima proporzione che il rettangolo DA al rettangolo OC, la quale è la medesima che ha la linea AF alla NC, che sono le altre due distanze delle leve, è manifesto, per lo lemma passato, che la medesima forza, che sendo applicata alla linea BG pareggerà la resistenza DA, pareggerà ancora la resistenza CO. Ed il medesimo si dimostrerà segandosi il solido in qualsisia altro luogo: adunque tal solido parabolico è per tutto egualmente resistente. Che poi segandosi il prisma secondo la linea parabolica FNB, se ne levi la terza parte, si fa ma-

nifesto: perchè la semiparabola FNBA e il rettangolo FB son basi di due solidi compresi da due piani paralleli, cioè tra i rettangoli FB, DG, perlochè ritengono tra di loro la medesima proporzione che esse lor basi; ma il rettangolo FB è sesquialtero della semiparabola FNBA; adunque segando il prisma secondo la linea parabolica, se ne leva la terza parte. Di qui si vede come con diminuzion di peso di più di trentatrè per cento si posson far i travamenti senza diminuir punto la loro gagliardia, il che nei navigli grandi, in particolare per regger le coverte, può esser di utile non piccolo; attesochè in cotali fabbriche la leggerezza importa infinitamente, *sempre che non si scapiti di robustezza.*

Sagr. Le utilità son tante, che lungo o impossibile sarebbe il registrarle tutte. Ma io, lasciate queste da banda, avrei più gusto d'intender che l'alleggerimento si faccia secondo le proporzioni assegnate. Che il taglio secondo la diagonale levi la metà del peso, l'intendo benissimo; ma che l'altro, secondo la parabolica, porti via la terza parte del prisma, posso crederlo al Sig. Salviati sempre veridico, ma in ciò più della fede mi sarebbe grata la scienza.

Salv. Vorreste dunque aver la dimostrazione come sia vero che l'eccesso del prisma sopra questo, che per ora chiamiamo solido parabolico, sia la terza parte di tutto il prisma. So di averlo altra volta dimostrato; tenterò ora se potrò mettere insieme la dimostrazione, per la quale intanto mi sovviene che mi serviva di certo lemma di Archimede, posto da esso nel libro delle Spirali; ed è, che se quante linee si vogliono si eccederanno egualmente, e l'eccesso sia eguale alla minima di quelle, ed altrettante siano ciascheduna eguale alla massima, i quadrati di tutte queste saranno meno che tripli dei quadrati di quelle che si eccedono; ma i medesimi saranno bene più che tripli di quelli altri che restano, trattone il quadrato della massima. Posto questo: Sia in questo rettangolo ACBP (*Fig.* 36) inscritta la linea parabolica AB; dobbiamo provare, il triangolo misto BAP, i cui lati sono BP, PA, e base la linea parabolica BA, esser la terza parte di tutto il rettangolo CP. Imperocchè se non è tale, sarà

o più che la terza parte o meno. Sia, se esser può, meno, ed a quello che gli manca intendasi essere eguale lo spazio X. Dividendo poi il rettangolo CP continuatamente in parti eguali con linee parallele ai lati BP, CA, arriveremo finalmente a parti tali, che una di loro sarà minore dello spazio X. Or sia una di quelle il rettangolo OB, e per i punti dove l'altre parallele segano la linea parabolica, facciansi passare le parallele alla AP; e qui intenderò circoscritta intorno al nostro triangolo misto una figura composta di rettangoli, che sono BO, IN, HM, FL, EK, GA, la qual figura sarà pur ancora meno che la terza parte del rettangolo CP, essendo che l'eccesso di essa figura sopra il triangolo misto è manco assai del rettangolo BO, il quale è ancor minore dello spazio X.

Sagr. Piano di grazia, che io non vedo come l'eccesso di questa figura circoscritta sopra il triangolo misto sia manco assai del rettangolo BO.

Salv. Il rettangolo BO non è egli eguale a tutti questi rettangoletti, per i quali passa la nostra linea parabolica, dico di questi BI, IH, HF, FE, EG, GA, dei quali una parte sola resta fuori del triangolo misto? ed il rettangolo BO non si è egli posto ancor minore dello spazio X? Adunque se il triangolo insieme con l'X pareggiava per l'avversario la terza parte del rettangolo CP, la figura circoscritta, che al triangolo aggiugne tanto meno che lo spazio X, resterà pur ancora minore della terza parte del rettangolo medesimo CP; ma questo non può essere, perchè ella è più della terza parte; adunque non è vero che il nostro triangolo misto sia manco del terzo del rettangolo.

Sagr. Ho intesa la soluzione del mio dubbio. Ma bisogna ora provarci che la figura circoscritta sia più della terza parte del rettangolo GP, dove credo che avremo assai più da fare.

Salv. Eh non ci è gran difficoltà. Imperocchè nella parabola il quadrato della linea DE al quadrato della ZG ha la medesima proporzione che la linea DA alla AZ, che è quella che ha il rettangolo KE al rettangolo AG (per esser l'altezze AK, KL eguali); adunque la proporzione che ha il

quadrato ED al quadrato ZG, cioè il quadrato LA al quadrato AK, l'ha ancora il rettangolo KE al rettangolo KZ. E nel medesimo modo appunto si proverà degli altri rettangoli LF, MH, NI, OB, star tra di loro come i quadrati delle linee MA, NA, OA, PA. Consideriamo adesso come la figura circoscritta è composta di alcuni spazi, che tra di loro stanno come i quadrati di linee che si eccedono con eccessi eguali alla minima, e come il rettangolo CP è composto di altrettanti spazi, ciascuno eguale al massimo, che sono tutti i rettangoli eguali all' OB. Adunque, pel lemma di Archimede, la figura circoscritta è più della terza parte del rettangolo CP; ma era anche minore, il che è impossibile; adunque il triangolo misto non è manco del terzo del rettangolo CP. Dico parimente che non è più, imperocchè se è più del terzo del rettangolo CP, intendasi lo spazio X eguale all' eccesso del triangolo sopra la terza parte di esso rettangolo CP, e fatta la divisione e suddivisione del rettangolo in rettangoli sempre eguali, si arriverà a tale che uno di quelli sia minore dello spazio X. Sia fatta; e sia il rettangolo BO minore dell' X, e descritta come sopra la figura, avremo nel triangolo misto inscritta una figura composta dei rettangoli VO, TN, SM, RL, QK, la quale non sarà ancora minore della terza parte del gran rettangolo CP. Imperocchè il triangolo misto supera di manco assai la figura inscritta di quello che egli superi la terza parte di esso rettangolo CP, attesochè l' eccesso del triangolo sopra la terza parte del rettangolo CP è eguale allo spazio X, il quale è minore del rettangolo BO, e questo è anco minore assai dell' eccesso del triangolo sopra la figura inscrittagli; imperocchè ad esso rettangolo BO sono eguali tutti i rettangoletti AG, GE, EF, FH, HI, IB, dei quali son ancora manco che la metà gli avanzi del triangolo sopra la figura inscritto. E però avanzando il triangolo la terza parte del rettangolo CP di più assai (avanzandolo dello spazio X) che ei non avanza la sua figura inscritta, sarà tal figura ancora maggiore della terza parte del rettangolo CP; ma ella è minore pel lemma supposto: imperocchè il rettangolo CP, come aggregato di tutti i rettangoli massimi, ai rettangoli compo-

nenti la figura inscritta ha la medesima proporzione che l'aggregato di tutti i quadrati delle linee eguali alla massima ai quadrati delle linee che si eccedono egualmente, trattone il quadrato della massima; e però (come dei quadrati accade) tutto l' aggregato dei massimi (che è il rettangolo CP) è più che triplo dell' aggregato degli eccedentisi, trattone il massimo, che compongono la figura inscritta. Adunque il triangolo misto non è nè maggiore nè minore della terza parte del rettangolo CP; è dunque eguale.

Sagr. Bella e ingegnosa dimostrazione, e tanto più quanto ella ci dà la quadratura della parabola, mostrandola essere sesquiterza del triangolo iscrittogli, provando quello che Archimede con due tra di loro diversissimi, ma amendue ammirabili progressi di molte proposizioni dimostrò. Come anco fu dimostrata ultimamente da Luca Valerio, altro Archimede secondo dell' età nostra, la qual dimostrazione è registrata nel libro che egli scrisse del centro della gravità dei solidi.

Salv. Libro veramente da non esser posposto a qualsisia scritto dai più famosi geometri del presente e di tutti i secoli passati: il quale quando fu veduto dall'Accademico nostro, lo fece desistere dal proseguire i suoi trovati, che egli andava continuando di scrivere sopra il medesimo suggetto, giacchè vide il tutto tanto felicemente ritrovato e dimostrato dal detto Sig. Valerio.

Sagr. Io era informato di tutto questo accidente dall'istesso Accademico; e l' aveva anco ricercato che mi lasciasse una volta vedere le sue dimostrazioni sin allora ritrovate quando ei s' incontrò nel libro del Sig. Valerio; ma non mi successe poi il vederle.

Salv. Io ne ho copia, e le mostrerò a V. S., che averà gusto di vedere la diversità dei metodi, con i quali camminano questi due autori per l' investigazione delle medesime conclusioni e loro dimostrazioni; dove anco alcune delle conclusioni hanno differente esplicazione, benchè in effetto egualmente vere.

Sagr. Mi sarà molto caro il vederle, e V. S. quando ritorni ai soliti congressi, mi farà grazia di portarle seco. Ma

intanto essendo questa della resistenza del solido cavato dal prisma col taglio parabolico operazione non men bella che utile in molte opere meccaniche, buona cosa sarebbe per gli artefici l'aver qualche regola facile e spedita per potere sopra il piano del prisma segnare essa linea parabolica.

Salv. Modi di disegnar tali linee ve ne son molti, ma due sopra tutti gli altri speditissimi glie ne dirò io. Uno dei quali è veramente maraviglioso, poichè con esso in manco tempo che col compasso altri disegnerà sottilmente sopra una carta quattro o sei cerchi di differenti grandezze, io posso disegnare trenta o quaranta linee paraboliche non men giuste, sottili e pulite delle circonferenze di essi cerchi. Io ho una palla di bronzo esquisitamente rotonda, non più grande di una noce; questa tirata sopra uno specchio di metallo tenuto non eretto all' orizzonte, ma alquanto inchinato, sì che la palla nel moto vi possa camminar sopra, calcandolo leggermente nel muoversi, lascia una linea parabolica sottilissimamente e pulitissimamente descritta, e più larga e più stretta, secondo che la projezione si sarà più o meno elevata. Dove anco abbiamo chiara e sensata esperienza, il moto dei projetti farsi per linee paraboliche: effetto non osservato prima che dal nostro amico, il quale ne arreca anco la dimostrazione nel suo libro del moto, che vedremo insieme nel primo congresso. La palla poi per descrivere al modo detto le parabole, bisogna, con maneggiarla alquanto con la mano, scaldarla ed alquanto inumidirla, che così lascerà più apparenti sopra lo specchio i suoi vestigi. L' altro modo, per disegnar la linea che cerchiamo sopra il prisma, procede così. Ferminsi ad alto due chiodi in una parete equidistanti all' orizzonte, e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo, su il quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga che la sua sacca si stenda quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura parabolica, sì che andando punteggiando sopra il muro la strada che vi fa essa catenella, avremo descritta un' intera parabola: la quale con un perpendicolo, che penda dal mezzo di quei due chiodi, si dividerà in parti

eguali. Il trasferir poi tal linea sopra le facce opposte del prisma non ha difficultà nessuna; sì che ogni mediocre artefice lo saprà fare. Potrebbesi anco con l' aiuto delle linee geometriche segnate sul compasso del nostro Amico, senz'altra fattura, andar su l' istessa faccia del prisma punteggiando la linea medesima.

Abbiamo sin qui dimostrate tante conclusioni attenenti alla contemplazione di queste resistenze dei solidi all' essere spezzati, con l' aver prima aperto l' ingresso a tale scienza col suppor come nota la resistenza per diritto, che si potrà conseguentemente camminar avanti ritrovandone altre ed altre conclusioni, e le dimostrazioni di quelle, che in natura sono infinite. Solo per ora, per ultimo termine degli odierni ragionamenti, voglio aggiugnere la speculazione delle resistenze dei solidi vacui, dei quali l'arte, e più la natura, si serve in mille operazioni, dove senza crescer peso si cresce grandemente la robustezza, come si vede nell' ossa degli uccelli ed in moltissime canne, che son leggiere e molto resistenti al piegarsi e rompersi: che se un fil di paglia, che sostiene una spiga più grave di tutto il gambo, fusse fatto della medesima quantità di materia, ma fusse massiccio, sarebbe assai meno resistente al piegarsi ed al rompersi. E con tal ragione ha osservato l' arte, e confermato l' esperienza, che una asta vuota, o una canna di legno o di metallo, è molto più salda che se fusse di altrettanto peso, e della medesima lunghezza massiccia, che in conseguenza sarebbe più sottile; e però l'arte ha trovato di far vuote dentro le lance, quando si desideri averle gagliarde e leggiere. Mostreremo per tanto come

Le resistenze di due cilindri eguali, ed egualmente lunghi, l' uno dei quali sia vuoto e l' altro massiccio, hanno tra di loro la medesima proporzione, che i lor diametri.

Siano la canna o cilindro vuoto AE (*Fig.* 37) ed il cilindro IN massiccio eguali in peso, ed egualmente lunghi. Dico, la resistenza della canna AE all'esser rotta alla resistenza del cilindro solido IN aver la medesima proporzione, che il diametro AB al diametro IL. Il che è assai manifesto; perchè

essendo la canna e il cilindro IN eguali, ed egualmente lunghi, il cerchio IL, base del cilindro, sarà eguale alla ciambella AB base della canna AE (chiamo ciambella la superficie che resta, tratto un cerchio minore dal suo concentrico maggiore), e però le loro resistenze assolute saranno eguali: ma perchè nel romper in traverso ci serviamo nel cilindro IN della lunghezza LN per leva, e per sostegno del punto L, e del semidiametro o diametro LI per contralleva; e nella canna la parte della leva, cioè la linea BE, è eguale alla LN, ma la contralleva oltre al sostegno B è il diametro o semidiametro AB; resta manifesto, la resistenza della canna superar quella del cilindro solido secondo l'eccesso del diametro AB sopra il diametro IL, che è quello che cercavamo. S'acquista dunque di robustezza nella canna vuota sopra la robustezza del cilindro solido secondo la proporzione dei diametri, tuttavolta però che amendue siano dell'istessa materia, peso e lunghezza. Sarà bene che conseguentemente andiamo investigando quello che accaggia negli altri casi indifferentemente tra tutte le canne e cilindri egualmente lunghi, benchè in quantità di peso diseguali, e più e meno evacuati. E prima dimostreremo, come

Dato una canna vuota, si possa trovare un cilindro pieno eguale ad essa.

Facilissima è tale operazione. Imperocchè sia la linea AB (*Fig.* 38) diametro della canna, e CD diametro del vuoto. Applichisi nel cerchio maggiore la linea AE eguale al diametro CD, e congiungasi la EB. E perchè nel mezzo cerchio AEB l'angolo E è retto, il cerchio, il cui diametro è AB, sarà eguale alli due cerchi dei diametri AE, EB; ma AE è il diametro del vuoto della canna; adunque il cerchio, il cui diametro sia EB, sarà eguale alla ciambiella ACBD: e però il cilindro solido, il cerchio della cui base abbia il diametro EB, sarà eguale alla canna, essendo egualmente lungo. Dimostrato questo, potremo speditamente

Trovare qual proporzione abbiano le resistenze di una canna e di un cilindro, qualunque siano, pur che egualmente lunghi.

Sia la canna ABE (*Fig.* 39), ed il cilindro RSM egualmente lungo; bisogna trovare qual proporzione abbiano tra di loro le lor resistenze. Trovisi, per la precedente, il cilindro ILN eguale alla canna, ed egualmente lungo, e delle linee IL, RS (diametri delle basi dei cilindri IN, RM) sia quarta proporzionale la linea V. Dico, la resistenza della canna AE a quella del cilindro RM esser come la linea AB alla V. Imperocchè essendo la canna AE eguale, ed egualmente lunga al cilindro IN, la resistenza della canna alla resistenza del cilindro starà come la linea AB alla IL; ma la resistenza del cilindro IN alla resistenza del cilindro RM sta come il cubo IL al cubo RS, cioè come la linea IL alla V; adunque *ex aequali* la resistenza della canna AE alla resistenza del cilindro RM ha la medesima proporzione che la linea AB alla V, che è quello che si cercava.

GIORNATA TERZA,

INTORNO

I MOVIMENTI LOCALI (1).

De subjecto vetustissimo novissimam promovemus scientiam. MOTU nil forte antiquius in natura, et circa eum volumina nec pauca, nec parva a philosophis conscripta reperiuntur. Symptomatum tamen, quae complura et scitu digna insunt in eo, adhuc inobservata, necdum demonstrata comperio. Leviora quaedam adnotantur: ut gratia exempli, naturalem motum gravium descendentium continue accelerari. Verum juxta quam proportionem ejus fiat acceleratio, proditum hucusque non est: nullus enim, quod sciam, demostravit, spatia a mobili descendente ex quiete peracta in temporibus aequalibus, eam inter se retinere rationem, quam habent numeri impares ab unitate consequentes. Observatum est, missilia, seu projecta, lineam qualitercunque curvam designare; veruntamen eam esse Parabolam nemo prodidit. Haec ita esse, et alia non pauca, nec minus scitu digna, a me demonstrabuntur, et quod pluris faciendum censeo, aditus et

(1) Le materie discorse in quésta e nella seguente Giornata sono in gran parte di quelle prime scritture di Galileo, delle quali abbiamo un saggio nei *Sermones de Motu Gravium* da noi pubblicati nel T. XI, e àlle quali si riferiscono le ultime parole della nostra prefazione al Tomo stesso. (L'Editore.)

accessus ad amplissimam, praestantissimamque scientiam, cujus hi nostri labores erunt elementa, recludetur; in qua ingenia meo perspicaciora abditiores recessus penetrabunt.

Tripartito dividimus hanc tractationem. In prima parte consideramus ea, quae spectant ad Motum aequabilem, seu uniformem. In secunda de Motu naturaliter accelerato scribimus. In tertia de Motu violento, seu de projectis.

LIBER PRIMUS.

DE MOTU ÆQUABILI.

Circa Motum aequabilem, seu uniformem, unica opus habemus definitione, quam ejusmodi profero:

DEFINITIO.

Aequalem seu uniformem motum intelligo eum, cujus partes quibuscunque temporibus aequalibus a mobili peractae, sunt inter se aequales.

ADMONITIO.

Visum est addere veteri definitioni (quae simpliciter appellat motum aequabilem, dum temporibus aequalibus aequalia transiguntur spatia) particulam, *quibuscunque*, hoc est omnibus temporibus aequalibus: fieri enim potest, ut temporibus aliquibus aequalibus mobile pertranseat spatia aequalia, dum tamen spatia transacta in partibus eorundem temporum minoribus, licet aequalibus, aequalia non sint. Ex allata definitione quatuor pendent Axiomata: scilicet

AXIOMA I.

Spatium transactum tempore longiori in eodem Motu aequabili majus esse spatio transacto tempore breviori.

AXIOMA II.

Tempus, quo majus spatium conficitur in eodem motu aequabili, longius est tempore, quo conficitur spatium minus.

Axioma III.

Spatium a majori velocitate confectum tempore eodem majus est spatio confecto a minori velocitate.

Axioma IV.

Velocitas, qua tempore eodem conficitur majus spatium, major est velocitate, qua conficitur spatium minus.

Theorema I, Propositio I.

Si Mobile aequabiliter latum eademque cum velocitate duo pertranseat spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta; et si tempora lationum sint ut spatia aequabili motu peracta, velocitas erit eadem (1).

Pertranseat enim mobile aequabiliter latum eadem cum velocitate duo spatia AB, BC (*Fig.* 40), et sit tempus motus per AB, DE; tempus vero motus per BC esto EF. Dico, ut spatium AB ad spatium BC, ita esse tempus DE ad tempus EF. Protrahantur utrinque spatia, et tempora versus G, H et I, K, et in AG sumantur quotcunque spatia ipsi AB aequalia, et totidem tempora in DI tempori DE similiter aequalia; et rursus in CH sumantur secundum quamcunque multitudinem spatia ipsi CB aequalia, et totidem tempora in FK tempori EF aequalia. Erunt jam spatium BG et tempus EI aeque multiplicia spatii BA et temporis ED juxta quamcunque multiplicationem accepta, et similiter spatium HB et tempus KE, spatii CB temporisque FE aeque multiplicia in qualibet multiplicatione. Et quia DE est tempus lationis per AB, erit totum EI tempus totius BG, cum motus ponatur aequabilis, sintque in EI tot tempora ipsi DE aequalia, quot sunt in BG spatia aequalia BA; et similiter concludetur KE esse tempus lationis per HB. Cum autem motus ponatur aequabilis, si spatium GB esset aequale ipsi BH, tempus quoque IE tempori EK foret aequale, et si GB majus sit quam BH, etiam IE quam EK majus erit, et si minus, minus. Sunt itaque quatuor magnitudines: AB prima, BC secunda, DE tertia, EF

(1) Aggiunta del Viviani.

quarta, et primae et tertiae, nempe spatii AB et temporis DE, sumpta sunt aeque multiplicia juxta quamcunque multiplicationem tempus IE et spatium GB; ac demonstratum est haec vel una aequari, vel una deficere, vel una excedere tempus EK et spatium BH, aeque multiplicia scilicet secundae et quartae; ergo prima ad secundam, nempe spatium AB ad spatium BC, eandem habet rationem, quam tertia et quarta, nempe tempus DE ad tempus EF, quod erat demostrandum.

Theorema II, Propositio II.

Si Mobile temporibus aequalibus duo pertranseat spatia, erunt ipsa spatia inter se ut velocitates. Et si spatia sint ut velocitates, tempora erunt aequalia.

Assumpta enim superiori figura, sint duo spatia AB, BC transacta aequalibus temporibus, spatium quidem AB cum velocitate DE, et spatium BC cum velocitate EF. Dico, spatium AB ad spatium BC esse, ut DE velocitas ad velocitatem EF; sumptis enim utrinque ut supra, et spatiorum et velocitatum aeque multiplicibus secundum quamcunque multiplicationem, scilicet GB et IE ipsorum AB et DE, pariterque HB, KE ipsorum BC, EF, concludetur per III Ax. vel IV, eodem modo ut supra, multiplicia GB, IE vel una deficere, vel aequari, vel excedere aeque multiplicia BH, EK; igitur et manifestum est propositum.

Theorema III, Propositio III.

Inaequalibus velocitatibus per idem spatium latorum tempora velocitatibus e contrario respondent. Et e converso, si tempora velocitatibus e contrario respondeant, mobilia aequalia spatia permeabunt (1).

Sint velocitates inaequales (*Fig.* 41) A major, B minor, et secundum utranque fiat motus per idem spatium CD. Dico tempus, quo A velocitas permeat spatium CD, ad tempus, quo velocitas B idem spatium permeat, esse, ut velocitas B ad velocitatem A. Fiat enim ut A ad B, ita CD ad CE; erit

(1) Aggiunta del Viviani.

igitur, ex praecedenti, tempus, quo A velocitas conficit CD, idem cum tempore, quo B conficit CE; sed tempus, quo velocitas B conficit CE, ad tempus quo eadem conficit CD, est ut CE ad CD; ergo tempus, quo velocitas A conficit CD, ad tempus, quo velocitas B idem CD conficit, est ut CE ad CD, hoc est ut velocitas B ad velocitatem A, quod erat intentum.

Theorema IV, Propositio IV.

Si duo mobilia ferantur motu aequabili, inaequali tamen velocitate, spatia, temporibus inaequalibus ab ipsis peracta, habebunt rationem compositam ex ratione velocitatum, et ex ratione temporum.

Mota sint duo mobilia E, F (*Fig.* 42) motu aequabili, et ratio velocitatis mobilis E ad volocitatem mobilis F sit, ut A ad B; temporis vero, quo movetur E, ad tempus, quo movetur F, ratio sit, ut C ad D. Dico, spatium peractum ab E cum velocitate A in tempore C, ad spatium peractum ab F cum velocitate B in tempore D, habere rationem compositam ex ratione velocitatis A ad velocitatem B, et ex ratione temporis C ad tempus D. Sit spatium ab E cum velocitate A in tempore C peractum G, et ut velocitas A ad velocitatem B, ita fiat G ad I; ut autem tempus C ad tempus D, ita sit I ad L, constat I esse spatium, quo movetur F in tempore eodem, in quo E motum est per G, cum spatia G, I sint ut velocitates A, B: et cum sit, ut tempus C ad tempus D, ita I ad L; sit autem I spatium, quod conficitur a mobili F in tempore C, erit L spatium, quod conficitur ab F in tempore D cum velocitate B: ratio autem G ad L componitur ex rationibus G ad I et I ad L, nempe ex rationibus velocitatis A ad velocitatem B, et temporis C ad tempus D; ergo patet propositum.

Theorema V, Propositio V.

Si duo mobilia aequabili motu ferantur, sint tamen velocitates inaequales, et inaequalia spatia peracta, ratio temporum composita erit ex ratione spatiorum, et ex ratione velocitatum contrarie sumptarum.

Sint duo mobilia A, B (*Fig.* 43), sitque velocitas ipsius A ad velocitatem ipsius B ut V ad T, spatia autem peracta sint ut S ad R. Dico, rationem temporis, quo motum est A, ad tempus, quo motum est B, compositam esse ex ratione velocitatis T ad velocitatem V, et ex ratione spatii S ad spatium R. Sit ipsius motus A tempus C, et ut velocitas T ad velocitatem V, ita sit tempus C ad tempus E. Et cum C sit tempus, in quo A cum velocitate V conficit spatium S, sitque ut velocitas T mobilis B ad velocitatem V, ita tempus C ad tempus E, erit tempus E illud, in quo mobile B conficeret idem spatium S. Fiat tertio, ut spatium S ad spatium R, ita tempus E ad tempus G; constat G esse tempus, quo B conficeret spatium R. Et quia ratio C ad G componitur ex rationibus C ad E, et E ad G; est autem ratio C ad E eadem cum ratione velocitatum mobilium A, B contrarie sumptarum, hoc est, cum ratione T ad V; ratio vero E ad G est eadem cum ratione spatiorum S, R; ergo patet propositum.

Theorema VI, Propositio VI.

Si duo mobilia aequabili motu ferantur, ratio velocitatum ipsorum composita erit ex ratione spatiorum peractorum et ex ratione temporum contrarie sumptorum.

Sint duo mobilia A, B (*ead. Fig.* 43) aequabili motu lata: sint autem spatia ab illis peracta in ratione V ad T, tempora vero sint ut S ad R. Dico, velocitatem mobilis A ad velocitatem ipsius B habere rationem compositam ex ratione spatii V ad spatium T, et temporis R ad tempus S.

Sit velocitas C ea, cum qua mobile A conficit spatium V in tempore S, et quam rationem habet spatium V ad spatium T, hanc habeat velocitas C ad aliam E; erit E velocitas, cum qua mobile B conficit spatium T in tempore eodem S: quod si fiat, ut tempus R ad tempus S, ita velocitas E ad aliam G, erit velocitas G illa, secundum quam mobile B conficit spatium T in tempore R. Habemus itaque velocitatem C, cum qua mobile A conficit spatium V in tempore S, et velocitatem G, cum qua mobile B conficit spatium T in tempore R, et est ratio C ad G composita ex rationibus C

ad E, et E ad G; ratio autem C ad E posita est eadem cum ratione spatii V ad spatium T; ratio vero E ad G est eadem cum ratione R ad S; ergo patet propositum.

SALV. Questo, che abbiamo veduto, è quanto il nostro Autore ha scritto del moto equabile. Passeremo dunque a più sottile e nuova contemplazione intorno al moto naturalmente accelerato, quale è quello che generalmente è esercitato dai mobili gravi discendenti, ed ecco il titolo e l'introduzione.

LIBER SECUNDUS.

DE MOTU NATURALITER ACCELERATO.

Quae in motu aequabili contingunt accidentia, in praecedenti libro considerata sunt: modo de motu accelerato tractandum. Et primo, definitionem ei, quo utitur natura, apprime congruentem investigare, atque explicare convenit. Quamvis enim aliquam lationis speciem ex arbitrio confingere, et consequentes ejus passiones contemplari, non sit inconveniens (ita enim qui Helicas aut Conchoides lineas ex motibus quibusdam exortas, licet talibus non utatur natura, sibi finxerunt, earum symptomata ex suppositione demonstrarunt cum laude), tamen quandoquidem quadam accelerationis specie in suis quibusdam motibus, gravium scilicet descendentium, utitur natura, eorundem speculari passiones decrevimus, si eam quam allaturi sumus de nostro motu accelerato definitionem cum essentia motus naturaliter accelerati congruere contigerit. Quod tandem post diuturnas mentis agitationes reperiisse confidimus, ea potissimum ducti ratione, quia symptomatis deinceps a nobis demonstratis apprime respondere, atque congruere videntur ea, quae naturalia experimenta sensui repraesentant. Postremo ad investigationem motus naturaliter accelerati nos quasi manu duxit animadversio consuetudinis, atque instituti ipsiusmet naturae in ceteris suis operibus omnibus; in quibus exerendis, uti consuevit mediis primis, simplicissimis, facillimis: neminem enim esse arbitror, qui credat natatum, aut volatum simpliciori, aut faciliori modo exerceri posse, quam eo ipso, quo pisces et aves in-

stinctu naturali utuntur. Dum igitur lapidem, ex sublimi a quiete descendentem, nova deinceps velocitatis acquirere incrementa animadverto, cur talia additamenta simplicissima, atque omnibus magis obvia ratione fieri non credam? Quod si attente inspiciamus, nullum additamentum, nullum incrementum magis simplex inveniemus, quam illud quod semper eodem modo superaddit. Quod facile intelligemus maximam temporis, atque motus affinitatem inspicientes: sicut enim motus aequabilitas et uniformitas per temporum, spatiorumque aequalitates definitur, atque concipitur (lationem enim tunc aequabilem appellamus, cum temporibus aequalibus aequalia conficiuntur spatia), ita per easdem aequalitates partium temporis, incrementa celeritatis simpliciter facta percipere possumus: mente concipientes motum illum uniformiter, eodemque modo continue acceleratum esse, dum temporibus quibuscunque aequalibus aequalia ei superaddantur celeritatis additamenta. Adeo ut sumptis quotcunque temporis particulis aequalibus a primo instanti, in quo mobile recedit a quiete, et descensum aggreditur, celeritatis gradus in prima cum secunda temporis particula acquisitus duplus sit gradus, quem acquisivit mobile in prima particula: gradus vero, quem obtinet in tribus particulis, triplus, quem in quatuor, quadruplus ejusdem gradus primi temporis. Ita ut (clarioris intelligentiae causa) si mobile lationem suam continuaret juxta gradum seu momentum velocitatis in prima temporis particula acquisitae, motumque suum deinceps aequabiliter cum tali gradu extenderet, latio haec duplo esset tardior ea, quam juxta gradum velocitatis in duabus temporis particulis acquisitae obtineret; et sic a recta ratione absonum nequaquam esse videtur, si accipiamus intensionem velocitatis fieri juxta temporis extensionem; ex quo definitio motus, de quo acturi sumus, talis accipi potest: Motum aequabiliter, seu uniformiter acceleratum dico illum, qui a quiete recedens, temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit.

Sagr. Io, sì come fuor di ragione mi opporrei a questa o ad altra definizione, che da qualsivoglia autore fusse as-

segnata, essendo tutte arbitrarie, così ben posso senza offesa dubitare se tal definizione concepita ed ammessa in astratto, si adatti, convenga, e si verifichi in quella sorta di moto accelerato, che i gravi naturalmente discendenti vanno esercitando. E perchè pare che l'Autore ci prometta, che tale, quale egli ha definito, sia il moto naturale dei gravi, volentieri mi sentirei rimuover certi scrupoli che mi perturbano la mente, acciò poi con maggiore attenzione potessi applicarmi alle proposizioni, e lor dimostrazioni che si attendono.

Salv. È bene che V. S. ed il Sig. Simplicio vadano proponendo le difficoltà: le quali mi vo immaginando che siano per essere quelle stesse che a me ancora sovvennero, quando primieramente vidi questo trattato, e che o dall'Autore medesimo ragionandone seco mi saran sopite, o taluna ancora da me stesso col pensarvi rimossa.

Sagr. Mentre io mi vo figurando un mobile grave discendente partirsi dalla quiete, cioè dalla privazione di ogni velocità, ed entrare nel moto, ed in quello andarsi velocitando secondo la proporzione che cresce il tempo dal primo instante del moto; ed avere, v. g., in otto battute di polso acquistato otto gradi di velocità, della quale nella quarta battuta ne aveva guadagnati quattro, *nella terza tre*, nella seconda due, nella prima uno, essendo il tempo suddivisibile in infinito, ne seguita, che diminuendosi sempre con tal ragione l'antecedente velocità, grado alcuno non sia di velocità così piccolo, o vogliamo dir di tardità così grande, nel quale non si sia trovato costituito l'istesso mobile dopo la partita dall'infinita tardità, cioè dalla quiete. Talchè se quel grado di velocità, che egli ebbe alle quattro battute di tempo, era tale che mantenendola equabile avrebbe corso due miglia in un'ora, e col grado di velocità che ebbe nella seconda battuta, avrebbe fatto un miglio per ora, convien dire, che negl'instanti del tempo più e più vicini al primo della sua mossa dalla quiete, si trovasse così tardo, che non avrebbe (seguitando di muoversi con tal tardità) passato un miglio in un'ora, nè in un giorno, nè in un anno, nè in mille, nè passato

anco un sol palmo in tempo maggiore: accidente, al quale pare che assai male agevolmente si accomodi l'immaginazione, mentre che il senso ci mostra un grave cadente venir subito con gran velocità.

Salv. Questa è una delle difficoltà, che a me ancora su il principio dette che pensare, ma non molto dopo la rimossi; ed il rimuoverla fu effetto della medesima esperienza che di presente a voi la suscita. Voi dite parervi che l'esperienza mostri, che appena partitosi il grave dalla quiete, entri in una molto notabile velocità; ed io dico che questa medesima esperienza ci chiarisce, i primi impeti del cadente, benchè gravissimo, esser lentissimi e tardissimi. Posate un grave sopra una materia cedente, lasciandovelo fin che prema quanto egli può con la sua semplice gravità: è manifesto, che alzandolo un braccio o due, lasciandolo poi cadere sopra la medesima materia, farà con la percossa nuova pressione, e maggiore che la fatta prima col solo peso; e l'effetto sarà cagionato dal mobile cadente congiunto con la velocità guadagnata nella caduta, il quale effetto sarà più e più grande, secondo che da maggiore altezza verrà la percossa, cioè secondo che la velocità del percuziente sarà maggiore. Quanta dunque sia la velocità di un grave cadente, lo potremo noi senza errore conghietturare dalla qualità e quantità della percossa. Ma ditemi, Signori, quel mazzo che lasciato cadere sopra un palo dall'altezza di quattro braccia lo ficca in terra, v. g., quattro dita, venendo dall'altezza di due braccia lo caccerà assai manco, e meno dall'altezza di uno, e manco da un palmo; e finalmente sollevandolo un dito, che farà di più, che se senza percossa vi fusse posto sopra? certo pochissimo, ed operazione del tutto impercettibile sarebbe, se si elevasse quanto è grosso un foglio. E perchè l'effetto della percossa si regola dalla velocità del medesimo percuziente, chi vorrà dubitare che lentissimo sia il moto, e più che minima la velocità, dove l'operazione sua sia impercettibile? Vedano ora quanta sia la forza della verità, mentre l'istessa esperienza, che pareva nel primo aspetto mostrare una cosa, meglio considerata ci assicura del con-

trario. Ma senza ridursi a tale esperienza (che senza dubbio è concludentissima), mi pare che non sia difficile col semplice discorso penetrare una tal verità. Noi abbiamo un sasso grave sostenuto nell'aria in quiete; si libera dal sostegno, e si pone in libertà; e come più grave dell'aria, vien discendendo al basso, e non con moto equabile, ma lento nel principio, e continuamente dopo accelerato; ed essendo che la velocità è augumentabile e menomabile in infinito, qual ragione mi persuaderà, che tal mobile partendosi da una tardità infinita (che tale è la quiete) entri immediatamente in dieci gradi di velocità più che in una di quattro, o in questa prima che in una di due, di uno, di un mezzo, di un centesimo? ed in somma in tutte le minori in infinito? Sentite in grazia. Io non credo che voi fuste renitenti a concedermi che l'acquisto dei gradi di velocità del sasso cadente dallo stato di quiete possa farsi col medesimo ordine, che la diminuzione e perdita dei medesimi gradi, mentre da virtù impellente fusse ricacciato in su alla medesima altezza: ma quando ciò sia, non vedo che si possa dubitare, che nel diminuirsi la velocità del sasso ascendente consumandola tutta possa pervenire allo stato di quiete prima che passar per tutti i gradi di tardità.

Simp. Ma se i gradi di tardità maggiore e maggiore sono infiniti, giammai non si consumeranno tutti; onde tal grave ascendente non si condurrà mai alla quiete, ma infinitamente si moverà, ritardandosi sempre: cosa che non si vede accadere.

Salv. Accaderebbe cotesto, Sig. Simplicio, quando il mobile andasse per qualche tempo trattenendosi in ciaschedun grado; ma egli vi passa solamente senza dimorarvi oltre a un instante, e perchè in ogni tempo quanto, ancorchè piccolissimo, sono infiniti instanti, però son bastanti a rispondere agl'infiniti gradi di velocità diminuita. Che poi tal grave ascendente non persista per verun tempo quanto in alcun medesimo grado di velocità, si fa manifesto così: perchè se assegnato qualche tempo quanto, nel primo instante di tal tempo, ed anco nell'ultimo, il mobile si trovasse avere il me-

desimo grado di velocità, potrebbe da questo secondo grado esser parimente sospinto in su per altrettanto spazio, sì come dal primo fu portato al secondo, e per l'istessa ragione passerebbe dal secondo al terzo, e finalmente continuerebbe il suo moto uniforme in infinito.

Sagr. Da questo discorso mi par che si potrebbe cavare una assai congrua ragione della quistione agitata tra i filosofi, qual sia la causa dell'accelerazione del moto naturale dei gravi. Imperocchè mentre io considero, nel grave cacciato in su andarsi continuamente diminuendo quella virtù impressagli dal proiciente, la quale, sin che fu superiore all'altra contraria della gravità, lo sospinse in alto, giunte che siano questa e quella all'equilibrio, resta il mobile di più salire e passa per lo stato della quiete, nel quale l'impeto impresso non è altrimente annichilato, ma solo consumatosi quell'eccesso, che pur dianzi aveva sopra la gravità del mobile, per lo quale prevalendogli lo spigneva in su. Continuandosi poi la diminuzione di questo impeto straniero, e in conseguenza cominciando il vantaggio ad esser dalla parte della gravità, comincia altresì la scesa, ma lenta per lo contrasto della virtù impressa, buona parte della quale rimane ancora nel mobile: ma perchè ella pur va continuamente diminuendosi, venendo sempre con maggior proporzione superata dalla gravità, quindi nasce la continua accelerazione del moto.

Simp. Il pensiero è arguto: ma più sottile che saldo. Imperocchè, quando pur sia concludente, non soddisfà se non a quei moti naturali, ai quali sia preceduto un moto violento, nel quale resti ancora vivace parte della virtù esterna: ma dove non sia tal residuo, ma si parta il mobile da una antiquata quiete, cessa la forza di tutto il discorso.

Sagr. Credo che voi siate in errore, e che questa distinzione di casi che fate sia superflua, o per dir meglio nulla. Però ditemi, se nel proietto può esser talvolta impressa dal proiciente molta e talora poca virtù, sì che possa essere scagliato in alto cento braccia, ed anco venti, o quattro, o uno?

Simp. Non è dubbio che sì.

Sagr. E non meno potrà cotal virtù impressa di così poco superar la resistenza della gravità, che non l'alzi più di un dito; e finalmente può la virtù del proiciente esser solamente tanta, che pareggi per l'appunto la resistenza della gravità, sì che il mobile sia non cacciato in alto, ma solamente sostenuto. Quando dunque voi reggete in mano una pietra, che altro fate voi che l'imprimerli tanta virtù impellente all'in su, quanta è la facoltà della sua gravità traente in giù? E questa vostra virtù non continuate voi di conservargliela impressa per tutto il tempo che voi la sostenete in mano? Si diminuisce ella forse per la lunga dimora che voi la reggete? E questo sostentamento, che vieta la scesa al sasso, che importa che sia fatto più dalla vostra mano che da una tavola o da una corda, dalla quale ei sia sospeso? Certo niente. Concludete pertanto, Signor Simplicio, che il precedere alla caduta del sasso una quiete lunga o breve o momentanea, non fa differenza alcuna, sì che il sasso non parta sempre affetto da tanta virtù contraria alla sua gravità, quanta appunto bastava a tenerlo in quiete.

Salv. Non mi par tempo opportuno di entrare al presente nell'investigazione della causa dell'accelerazione del moto naturale, intorno alla quale da vari filosofi varie sentenze sono state prodotte; riducendola alcuni all'avvicinamento al centro, altri al restar successivamente manco parti del mezzo da fendersi, altri a certa estrusione del mezzo ambiente, il quale nel ricongiugnersi a tergo del mobile lo va premendo e continuatamente scacciando; le quali fantasie con altre appresso converrebbe andare esaminando, e con poco guadagno risolvendo. Per ora basta al nostro Autore, che noi intendiamo che egli ci vuole investigare e dimostrare alcune passioni di un moto accelerato (qualunque si sia la causa della sua accelerazione), talmente che i momenti della sua velocità vadano accrescendosi dopo la sua partita dalla quiete con quella semplicissima proporzione, con la quale cresce la continuazion del tempo, che è quanto dire che in tempi eguali si facciano eguali additamenti di velocità. E se s'incontrerà che gli accidenti, che poi saranno dimostrati, si verifichino nel

moto dei gravi naturalmente discendenti ed accelerati, potremo reputare che l'assunta definizione comprenda cotal moto dei gravi, e che vero sia che l'accelerazione loro vada crescendo secondo che cresce il tempo e la durazione del moto.

Sagr. Per quanto per ora mi si rappresenta all'intelletto, mi pare che con chiarezza forse maggiore si fusse potuto definire senza variare il concetto: Moto uniformemente accelerato esser quello, nel quale la velocità andasse crescendo secondo che cresce lo spazio che si va passando; sì che, per esempio, il grado di velocità acquistato dal mobile nella scesa di quattro braccia, fusse doppio di quello che egli ebbe, sceso che fu lo spazio di due, e questo doppio del conseguìto nello spazio del primo braccio. Perchè non mi par che sia da dubitare, che quel grave che viene dall'altezza di sei braccia, non abbia e percuota con impeto doppio di quello che ebbe, sceso che fu tre braccia, e triplo di quello che ebbe alle due, e sescuplo dell'avuto nello spazio di uno.

Salv. Io mi consolo assai d'aver avuto un tanto compagno nell'errore; e più vi dirò che il vostro discorso ha tanto del verisimile e del probabile, che il nostro medesimo Autore non mi negò, quando io glielo proposi, d'esser egli ancora stato per qualche tempo nella medesima fallacia. Ma quello di che io poi sommamente mi maravigliai, fu il vedere scuoprir con quattro semplicissime parole, non pur false, ma impossibili due proposizioni che hanno del verisimile tanto, che avendole io proposte a molti, non ho trovato chi liberamente non me le ammettesse.

Simp. Veramente io sarei del numero dei conceditori: e che il grave discendente *vires acquirat eundo*, crescendo la velocità a ragion dello spazio, e che il momento dell'istesso percuziente sia doppio venendo da doppia altezza, mi paiono proposizioni da concedersi senza repugnanza o controversia.

Salv. E pur son tanto false e impossibili, quanto che il moto si faccia in un istante. Ed eccovene chiarissima dimostrazione. Quando le velocità hanno la medesima proporzione che gli spazi passati o da passarsi, tali spazi vengono passati

in tempi eguali; se dunque le velocità, con le quali il cadente passò lo spazio di quattro braccia, furon doppie delle velocità con le quali passò le due prime braccia (sì come lo spazio è doppio dello spazio), adunque i tempi di tali passaggi sono eguali; ma passare il medesimo mobile le quattro braccia e le due nell' istesso tempo non può aver luogo fuor che nel moto instantaneo; ma noi vediamo che il grave cadente fa suo moto in tempo, ed in minore passa le due braccia che le quattro; adunque è falso che la velocità sua cresca come lo spazio. L' altra proposizione si dimostra falsa con la medesima chiarezza. Imperocchè, essendo quello che percuote, il medesimo; non può determinarsi la differenza e momento delle percosse, se non dalla differenza delle velocità. Quando dunque il percuziente venendo da doppia altezza facesse percossa di doppio momento, bisognerebbe che percuotesse con doppia velocità; ma la doppia velocità passa il doppio spazio nell' istesso tempo, e noi vediamo il tempo della scesa dalla maggiore altezza esser più lungo.

Sagr. Troppa evidenza, troppa agevolezza è questa con la quale manifestate conclusioni ascose; questa somma facilità le rende di minor pregio che non erano mentre stavano sotto contrario sembiante. Poco penso io che prezzerebbe l'universale notizie acquistate con sì poca fatica, in comparazione di quelle, intorno alle quali si fanno lunghe ed inesplicabili altercazioni.

Salv. A quelli, i quali con gran brevità e chiarezza mostrano le fallacie di proposizioni state comunemente tenute per vere dall' universale, danno assai comportabile sarebbe il riportarne solamente disprezzo in luogo di aggradimento; ma bene spiacevole e molesto riesce cert' altro affetto, che suole talvolta destarsi in alcuni, che pretendendo nei medesimi studj almeno la parità con chiunque si sia, si vedono aver trapassate per vere conclusioni, che poi da un altro con breve e facile discorso vengono scoperte e dichiarate false. Io non chiamerò tale affetto invidia, solita a convertirsi poi in odio ed ira contro agli scuopritori di tali fallacie, ma lo dirò uno stimolo, e una brama di voler più presto mantener gli

errori inveterati, che permettere che si ricevano le verità nuovamente scoperte; la qual brama talvolta gl' induce a scrivere in contraddizione a quelle verità, pur troppo internamente conosciute anco da loro medesimi, solo per tener bassa nel concetto del numeroso e poco intelligente vulgo l' altrui reputazione. Di simili conclusioni false ricevute per vere, e di agevolissima confutazione, non piccol numero ne ho io sentite dal nostro Accademico, di parte delle quali ho anco tenuto registro.

Sagr. E V. S. non dovrà privarcene, ma a suo tempo farcene parte, quando ben anco bisognasse in grazia loro fare una particolar sessione. Per ora, continuando il nostro filo, parmi che sin qui abbiamo fermata la definizione del moto uniformemente accelerato, del quale si tratta nei discorsi che seguono; ed è:

Motum aequabiliter, seu uniformiter acceleratum, dicimus eum, qui a quiete recedens temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit.

Salv. Fermata cotal definizione, un solo principio domanda e suppone per vero l' Autore, cioè:

Accipio, gradus velocitatis ejusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos tunc esse aequales, cum eorundem planorum elevationes aequales sint.

Chiama la elevazione di un piano inclinato la perpendicolare, che dal termine sublime di esso piano casca sopra la linea orizzontale prodotta per l' infimo termine di esso piano inclinato, come per intelligenza, essendo la linea BA (*Fig.* 44) parallela all' orizzonte, sopra il quale siano inclinati li due piani CA, CD, la perpendicolare CB, cadente sopra la orizzontale BA, chiama l'Autore la elevazione dei piani CA, CD, e suppone che i gradi di velocità del medesimo mobile scendente per li piani inclinati CA, CD, acquistati nei termini A, D, siano eguali, per esser la loro elevazione l'istessa CB. E tanto anco si dee intendere il grado di velocità, che il medesimo cadente dal punto C avrebbe nel termine B.

Sagr. Veramente mi par che tal supposto abbia tanto del probabile, che meriti di esser senza controversia conce-

duto, intendendo sempre che si rimuovano tutti gl'impedimenti accidentari ed esterni, e che i piani siano ben solidi e tersi, ed il mobile di figura perfettissimamente rotonda, sì che ed il piano ed il mobile non abbiano scabrosità. Rimossi tutti i contrasti ed impedimenti, il lume naturale mi detta senza difficoltà, che una palla grave, e perfettamente rotonda, scendendo per le linee CA, CD, CB, giugnerebbe nei termini A, D, B, con impeti eguali.

Salv. Voi molto probabilmente discorrete, ma oltre al verisimile voglio con una esperienza crescer tanto la probabilità, che poco gli manchi all'agguagliarsi ad una ben necessaria dimostrazione. Figuratevi (*Fig.* 45) questo foglio essere una parete eretta all'orizzonte, e da un chiodo fitto in essa pendere una palla di piombo di un'oncia o due, sospesa dal sottil filo AB lungo due o tre braccia perpendicolare all'orizzonte, e nella parete segnate una linea orizzontale DC segante a squadra il perpendicolo AB, il quale sia lontano dalla parete due dita in circa: trasferendo poi il filo AB con la palla in AC, lasciate essa palla in libertà, la quale primieramente vedrete scendere descrivendo l'arco CBD, e di tanto trapassare il termine B, che scorrendo per l'arco BD sormonterà fino quasi alla segnata parallela CD, restando di pervenirvi per piccolissimo intervallo, toltogli il precisamente arrivarvi dall'impedimento dell'aria e del filo. Dal che possiamo veracemente concludere, che l'impeto acquistato nel punto B dalla palla nello scendere per l'arco CB, fu tanto, che bastò a risospingersi per un simile arco BD alla medesima altezza. Fatta, e più volte reiterata cotale esperienza, voglio che ficchiamo nella parete rasente al perpendicolo AB un chiodo, come in E, ovvero in F, che sporga in fuori cinque o sei dita, e questo acciocchè il filo AC, tornando come prima a riportar la palla C per l'arco CB, giunta che ella sia in B, intoppando il filo nel chiodo E, sia costretta a camminare per la circonferenza BG descritta intorno al centro E; dal che vedremo quello che potrà far quel medesimo impeto, che dianzi concepito nel medesimo termine B, sospinse l'istesso mobile per l'arco ED all'altezza dell'oriz-

zontale CD. Ora, Signori, voi vedrete con gusto condursi la palla all'orizzontale nel punto G, e l'istesso accadere se l'intoppo si mettesse più basso, come in F, dove la palla descriverebbe l'arco BI, terminando sempre la sua salita precisamente nella linea CD; e quando l'intoppo del chiodo fusse tanto basso, che l'avanzo del filo sotto di lui non arrivasse all'altezza di CD (il che accaderebbe quando fusse più vicino al punto B, che al segamento dell'AB coll'orizzontale CD), allora il filo cavalcherebbe il chiodo, e se gli avvolgerebbe intorno. Questa esperienza non lascia luogo di dubitare della verità del supposto: imperocchè essendo li due archi CB, DB eguali e similmente posti, l'acquisto di momento fatto per la scesa nell'arco CB, è il medesimo che il fatto per la scesa dell'arco DB; ma il momento acquistato in B per l'arco CB è potente a risospingere in su il medesimo mobile per l'arco BD; adunque anco il momento acquistato nella scesa DB è eguale a quello che sospigne l'istesso mobile pel medesimo arco da B in D; sì che universalmente, ogni momento acquistato per la scesa d'un arco è eguale a quello che può far risalire l'istesso mobile pel medesimo arco: ma i momenti tutti, che fanno risalire per tutti gli archi BD, BG, BI sono eguali, poichè son fatti dall'istesso medesimo momento acquistato per la scesa CB, come mostra l'esperienza; adunque tutti i momenti che si acquistano per le scese negli archi DB, GB, IB sono eguali.

Sagr. Il discorso mi par concludentissimo, e l'esperienza tanto accomodata per verificare il postulato, che molto ben sia degno d'esser conceduto, come se fusse dimostrato.

Salv. Io non voglio, Sig. Sagrèdo, che noi ci pigliamo più del dovere, e massimamente che di questo assunto ci abbiamo a servire principalmente nei moti fatti sopra superficie rette, e non sopra curve, nelle quali l'accelerazione procede con gradi molto differenti da quelli con i quali noi pigliamo ch'ella proceda ne' piani retti. Di modo che sebbene l'esperienza addotta ci mostra che la scesa per l'arco CB conferisce al mobile momento tale, che può ricondurlo alla medesima altezza per qualsivoglia arco BD, BG, BI, noi non

possiamo con simile evidenza mostrare che l'istesso accadesse quando una perfettissima palla dovesse scendere per piani retti inclinati secondo le inclinazioni delle corde di questi medesimi archi, anzi è credibile che formandosi *diversi* angoli da essi piani retti nel termine B, la palla scesa per l'inclinato secondo la corda CB, trovando intoppo nei piani ascendenti, secondo le corde BD, BG, BI, nell'urtare in essi perderebbe del suo impeto, nè potrebbe, salendo, condursi all'altezza della linea CD. Ma levato l'intoppo che pregiudica all'esperienza, mi par bene che l'intelletto resti capace, che l'impeto (che in effetto piglia vigore dalla quantità della scesa) sarebbe potente a ricondurre il mobile alla medesima altezza. Prendiamo dunque per ora questo, come postulato, la verità assoluta del quale ci verrà poi stabilita dal vedere altre conclusioni fabbricate sopra tale ipotesi rispondere e puntualmente confrontarsi con l'esperienza (1). Supposto dall'Autore questo solo principio, passa alle proposizioni, dimostrativamente concludendole, delle quali la prima è questa:

THEOREMA I, PROPOSITIO I.

Tempus, in quo aliquod spatium a mobili conficitur latione ex quiete uniformiter accelerata, est aequale tempori, in quo

(1) Qui chiaramente si vede che l'autore, Galileo, conosce e sa molto bene che un grave, dopo la scesa per un piano col suo moto naturalmente accelerato, trovando un piano elevato ed anche inclinato che col passato faccia angolo, coll'urto che vi fa sopra perderà alquanto del suo impeto acquistato in quella precedente scesa; e perciò dovunque egli in questo suo trattato andrà esaminando i tempi e gli spazi passati dal grave mobile dopo qualche scesa, egli esclude onninamente tali perdite d'impeti acquistati, come se gl'intoppi o gli urti negli altri piani nei quali esso s'incontra non vi fossero; e su questo supposto d'esclusione di perdita dell'impeto acquistato non si può negare o dire ch'ei non concluda e dimostri geometricamente bene le sue proposte.

Se poi vi è stato dopo Galileo chi ha voluto far conto, considerare e misurar tali perdite d'impeti nell'urtar in que' piani, chiunque punto punto rifletterà al modo di misurarle stato addotto da questi tali, bentosto si accorgerà che essi l'hanno cavato da ciò che il medesimo Galileo ha dimostrato dopo la quarta proposizione del moto dei projetti, spiegata nel suo quarto dialogo in quel lungo suo discorso fatto fra essa quarta proposizione e la quinta. Laonde si vede che se Galileo avesse voluto far conto di dette perdite d'impeti nell'urtare, egli ancora avrebbe saputo strigarsene col far capitale del suo proprio, e fabbricar con gli strumenti della sua propria fucina. (*N. del Viviani*).

idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu aequabili delato, cujus velocitatis gradus subduplus sit ad summum, et ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati.

Repraesentetur (*Fig.* 46) per extensionem AB tempus, in quo a mobili latione uniformiter accelerata ex quiete in C conficiatur spatium CD; graduum autem velocitatis adauctae in instantibus temporis AB maximus, et ultimus repraesentetur per EB, utcunque super AB constitutam; junctaque AE, lineae omnes ex singulis punctis lineae AB ipsi BE aequidistanter actae, crescentes velocitatis gradus post instans A repraesentabunt. Divisa deinde BE bifariam in F, ductisque parallelis FG, AG ipsis BA, BF; parallelogrammum AGFB erit constitutum triangulo AEB aequale, dividens suo latere GF bifariam AE in I: quod si parallelae trianguli AEB usque ad GIF extendantur, habebimus aggregatum parallelarum omnium in quadrilatero contentarum aequalem aggregatui comprehensarum in triangulo AEB; quae enim sunt in triangulo IEF, paria sunt cum contentis in triangulo GIA; eae vero quae habentur in trapezio AIFB, communes sunt. Cumque singulis et omnibus instantibus temporis AB respondeant singula et omnia puncta lineae AB, ex quibus actae parallelae in triangulo AEB comprehensae crescentes gradus velocitatis adauctae repraesentant, parallelae vero intra parallelogrammum contentae totidem gradus velocitatis non adauctae, sed aequabilis itidem repraesentent: apparet *tempore AB* totidem velocitatis momenta absumpta esse in motu accelerato juxta crescentes parallelas trianguli AEB, ac in motu aequabili juxta *aequales* parallelas parallelogrammi GB: quod enim momentorum deficit in prima motus accelerati medietate (deficiunt enim momenta per parallelas trianguli AGI repraesentata), reficitur a momentis per parallelas trianguli IEF repraesentatis; patet igitur, aequalia futura esse spatia tempore eodem a duobus mobilibus peracta, quorum unum motu ex quiete uniformiter accelerato moveatur, alterum vero motu aequabili juxta momentum subduplum momenti maximi velocitatis accelerati motus, quod erat intentum.

THEOREMA II, PROPOSITIO II.

Si aliquod mobile motu uniformiter accelerato descendat ex quiete, spatia quibuscunque temporibus ab ipso ex quiete *peracta sunt inter se in duplicata ratione eorundem temporum: nempe ut eorundem temporum quadrata.*

Intelligatur fluxus temporis ex aliquo primo instanti A (*Fig.* 47) repraesentari per extensionem AB, in qua sumantur duo quaelibet tempora AD, AE; sitque HI linea, in qua mobile ex puncto H, tanquam primo motus principio, descendat uniformiter acceleratum; sitque spatium HL peractum primo tempore AD, HM vero sit spatium per quod descenderit in tempore AE. Dico, spatium MH ad spatium HL esse in duplicata ratione ejus, quam habet tempus EA ad tempus AD. Seu dicamus, spatia MH, HL eandem habere rationem quam habent quadrata EA, AD. Ponatur linea AC, quemcunque angulum cum ipsa AB continens; ex punctis vero D, E ductae sint parallelae DO, EP, quarum DO si concipiatur repraesentare maximum gradum velocitatis acquisitae in instanti D temporis AD; PE repraesentabit ex definitione maximum gradum velocitatis acquisitae in instanti E temporis AE. Quia vero supra demonstratum est, quod attinet ad spatia peracta, aequalia esse inter se illa, quorum alterum conficitur a mobili ex quiete motu uniformiter accelerato; alterum vero, quod tempore eodem conficitur a mobili moti aequabili delato, cujus velocitas subdupla sit maximae in motu accelerato acquisitae; constat, spatia MH, LH esse eadem, quae motibus aequalibus, quorum velocitates essent ut dimidiae PE, OD, conficerentur in temporibus EA, DA. Si igitur ostensum fuerit, haec spatia MH, LH esse in duplicata ratione temporum EA, DA, intentum probatum erit. Verum in quarta propositione primi libri demonstratum est, mobilium aequabili motu latorum spatia peracta habere inter se rationem compositam ex ratione velocitatum et ex ratione temporum: hic autem ratio velocitatum est eadem cum ratione temporum (quam enim rationem habet dimidia PE ad dimidiam OD, seu tota PE ad totam OD, hanc habet AE ad AD), ergo ra-

tio spatiorum peractorum dupla est rationis temporum, quod erat demonstrandum.

Patet etiam hinc, eandem spatiorum rationem esse dúplam rationis maximorum graduum velocitatis; nempe linearum PE, OD, cum sit PE ad OD, ut EA ad DA.

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum est, quod si fuerint quotcunque tempora aequalia consequenter sumpta a primo instanti seu principio lationis, ut puta AD, DE, EF, FG, quibus conficiantur spatia HL, LM, MN, NI, ipsa spatia erunt inter se, ut numeri impares ab unitate, scilicet ut 1, 3, 5, 7. Haec enim est ratio excessuum quadratorum linearum sese aequaliter excedentium, et quarum excessus est aequalis minimae ipsarum: seu dicamus quadratorum sese ab unitate consequentium. Dum igitur gradus velocitatis augentur juxta seriem simplicem numerorum in temporibus aequalibus, spatia peracta iisdem temporibus incrementa suscipiunt juxta seriem numerorum imparium ab unitate.

SAGR. Sospendete in grazia alquanto la lettura, mentre io vo ghiribizzando intorno a certo concetto pur ora cascatomi in mente, per la spiegazione del quale, per mia e per vostra più chiara intelligenza, fo un poco di disegno (*Fig.* 48), dove mi figuro per la linea AI la continuazione del tempo dopo il primo instante in A; applicando poi in A, secondo qualsivoglia angolo, la retta AF e congiugnendo i termini I, F, diviso il tempo AI in mezzo in C, tiro la CB parallela alla IF. Considerando poi la CB come grado massimo della velocità, che cominciando dalla quiete, nel primo instante del tempo A, si andò augumentando secondo il crescimento delle parallele alla BC, prodotte nel triangolo ABC (che è il medesimo che crescere secondo che cresce il tempo), ammetto senza controversia, per i discorsi fatti sin qui, che lo spazio passato dal mobile cadente con la velocità accresciuta nel detto modo sarebbe eguale allo spazio che passerebbe il medesimo mobile, quando si fusse nel medesimo tempo AC mosso

di moto uniforme, il cui grado di velocità fusse eguale all'EC metà del BC. Passo ora più oltre, e figuratomi il mobile sceso con moto accelerato trovarsi nell'instante C, avere il grado di velocità BC, è manifesto che se egli continuasse di muoversi con l'istesso grado di velocità BC senza più accelerarsi, passerebbe nel seguente tempo CI spazio doppio di quello che passò nell'egual tempo AC, col grado di velocità uniforme EC, metà del grado BC. Ma perchè il mobile scende con velocità accresciuta sempre uniformemente in tutti i tempi eguali, aggiugnerà al grado CB nel seguente tempo CI quei momenti medesimi di velocità crescente secondo le parallele del triangolo BFG eguale al triangolo ABC. Sì che aggiunto al grado di velocità GI la metà del grado FG, massimo degli acquistati nel moto accelerato, e regolati dalle parallele del triangolo BFG, avremo il grado di velocità IN, col quale di moto uniforme si sarebbe mosso nel tempo CI; il quale grado IN essendo triplo del grado EC, conviene, lo spazio passato nel secondo tempo CI dovere esser triplo del passato nel primo tempo CA. E se noi intenderemo essere aggiunta ad AI un'altra egual parte di tempo IO, ed accresciuto il triangolo sino in APO, è manifesto che quando si continuasse il moto per tutto il tempo IO col grado di velocità IF, acquistato nel moto accelerato nel tempo AI, essendo tal grado IF quadruplo dell'EC, lo spazio passato nel tempo IO sarebbe quadruplo del passato nell'egual primo tempo AC; ma continuando l'accrescimento dell'uniforme accelerazione nel triangolo FPQ, simile a quello del triangolo ABC, che ridotto a moto equabile aggiugne il grado eguale all'EC, aggiunto il QR eguale all'EC, avremo tutta la velocità equabile esercitata nel tempo IO quintupla dell'equabile del primo tempo AC, e però lo spazio passato quintuplo del passato nel primo tempo AC. Vedesi dunque anco in questo semplice calcolo, gli spazj passati in tempi eguali dal mobile, che partendosi dalla quiete va acquistando velocità conforme all'accrescimento del tempo, esser tra di loro come i numeri impari *ab unitate* 1, 3, 5, e congiuntamente presi gli spazi passati, il passato nel doppio tempo esser quadruplo del

passato nel sudduplo, il passato nel tempo triplo esser nonuplo, ed in somma gli spazi passati essere in duplicata proporzione dei tempi, cioè come i quadrati di essi tempi. *Qui vedasi quanto le dedotte conclusioni son vere, se si possono in varj modi rigirare, riducendole sempre a maggior chiarezza o brevità, dicendo: Se col raddoppiare il tempo del moto, tenendo fermo continuamente il medesimo grado di velocità, lo spazio passato viene anch' esso raddoppiato, e se con dupla velocità si passa nel medesimo tempo doppio spazio, adunque è chiaro che quando si raddoppi il tempo e la velocità insieme si quadruplicherà anche lo spazio.*

Simp. Io veramente ho preso più gusto in questo semplice e chiaro discorso del Signor Sagredo, che nella per me più oscura dimostrazione dell'Autore; sì che io resto assai ben capace che il negozio debba succeder così, posta e ricevuta la definizione del moto uniformemente accelerato. Ma se tale sia poi l' accelerazione, della quale si serve la natura nel moto dei suoi gravi discendenti, io per ancora ne resto dubbioso, e però per intelligenza mia e di altri simili a me, parmi che sarebbe stato opportuno in questo luogo arrecare qualche esperienza di quelle che si è detto esservene molte, che in diversi casi s' accordano con le conclusioni dimostrate.

Salv. Voi da vero scienziato fate una ben ragionevole domanda, e così si costuma e conviene nelle scienze, le quali alle conclusioni naturali applicano le dimostrazioni matematiche, come si vede nei perspettivi, negli astronomi, nei meccanici, nei musici ed altri, li quali con sensate esperienze confermano i principj loro, che sono i fondamenti di tutta la seguente struttura: e però non voglio che ci paja superfluo se con troppa lunghezza avremo discorso sopra questo primo e massimo fondamento, sopra il quale s' appoggia l' immensa macchina d' infinite conclusioni, delle quali solamente una piccola parte ne abbiamo in questo libro poste dall'Autore, il quale avrà fatto assai ad aprir l' ingresso e la porta stata fin' ora serrata agl' ingegni speculativi. Circa dunque all' esperienze non ha tralasciato l'Autor di farne, e per as-

sicurarsi che l'accelerazione dei gravi naturalmente discendenti segua nella proporzione sopraddetta, molte volte mi son ritrovato io a farne la prova nel seguente modo, in sua compagnia.

In un regolo, o vogliam dir corrente di legno, lungo circa 12 braccia, e largo per un verso mezzo braccio e per l'altro 3 dita, si era in questa minor larghezza incavato un canaletto poco più largo di un dito. Tiratolo dirittissimo, e per averlo ben pulito e liscio, incollatovi dentro una carta pecora zannata e lustrata al possibile, si faceva in esso scendere una palla di bronzo durissimo ben rotondata e pulita. Costituito che si era il detto regolo pendente, elevando sopra il piano orizzontale una delle sue estremità, un braccio o due ad arbitrio, si lasciava (come dico) scendere per lo detto canale la palla, notando, nel modo che appresso dirò, il tempo che consumava nello scorrerlo tutto: replicando il medesimo atto molte volte per assicurarsi bene della quantità del tempo, nel quale non si trovava mai differenza, nè anco della decima parte di una battuta di polso. Fatta e stabilita precisamente tale operazione, facemmo scender la medesima palla solamente per la quarta parte della lunghezza di esso canale; e misurato il tempo della sua scesa, si trovava sempre puntualissimamente esser la metà dell'altro. E facendo poi l'esperienze di altre parti, ed esaminando il tempo di tutta la lunghezza col tempo della metà e con quello dei $\frac{2}{3}$ o dei $\frac{3}{4}$, o in conclusione con qualunque altra divisione, per esperienze ben cento volte replicate, sempre s'incontrava, gli spazi passati esser tra di loro come i quadrati dei tempi: e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale, nel quale si faceva scender la palla. Dove osservammo ancora, i tempi delle scese per diverse inclinazioni mantenere esquisitamente tra di loro quella proporzione, che più a basso troveremo essergli assegnata e dimostrata dall'Autore. Quanto poi alla misura del tempo, si teneva una gran secchia piena d'acqua attaccata in alto, la quale per un sottil cannellino saldatogli nel fondo, versava un sottil filo di acqua, che si andava ricevendo con un picciol bicchiere per tutto il tempo

che la palla scendeva nel canale e nelle sue parti: le particelle poi dell' acqua in tal guisa raccolte si andavano di volta in volta con esattissima bilancia pesando, dandoci le differenze e proporzioni dei pesi loro le differenze e proporzioni dei tempi; e questo con tal giustezza, che, come ho detto, tali operazioni molte e molte volte replicate giammai non differivano di un notabil momento.

Simp. Gran soddisfazione avrei ricevuta nel trovarmi presente a tali esperienze, ma sendo certo della vostra diligenza nel farle, e fedeltà nel riferirle, mi quieto, e le ammetto per sicurissime e vere.

Salv. Potremo dunque ripigliar la nostra lettura, e sèguitare avanti.

Corollarium II.

Colligitur secundo, quod si a principio lationis sumantur duo spatia quaelibet, quibuslibet temporibus peracta, tempora ipsorum *a quiete, vel impetus, seu velocitates in fine ipsorum acquisitae,* erunt inter se, ut alterum eorum ad spatium medium proportionale inter ipsa. Sumptis enim a principio lationis S (*Fig.* 49) duobus spatiis ST, SV, quorum medium sit proportionale SX; tempus casus per ST ad tempus casus per SV erit, ut ST ad SX: seu dicamus, tempus per SV ad tempus per ST esse, ut VS ad SX. Cum enim demonstratum sit, spatia peracta esse in duplicata ratione temporum, seu (quod idem est) esse ut temporum quadrata: ratio autem spatii VS ad spatium ST sit dupla rationis VS ad SX, seu sit eadem, quam habent quadrata VS, SX; patet, rationem temporum lationum per SV, ST esse, ut spatiorum, seu linearum VS, SX. *Ac item velocitates in T, V, post casus per ST, SV, esse ut spatia ST, SX, vel ut SX, SV, cum juxta definitionem accelerati motus, velocitates in ratione temporum augeantur.*

Scholium.

Id autem, quod demostratum est in lationibus peractis in perpendiculis, intelligatur etiam itidem contingere in pla-

nis utcunque inclinatis; in iisdem enim assumptum est, accelerationis gradus eadem ratione augeri, nempe secundum temporis incrementum, seu dicas secundum simplicem ac primam numerorum seriem.

Salv. Qui vorrei, Sig. Sagredo, che a me ancora fusse permesso, sebben forse con troppo tedio del Sig. Simplicio, il differir per un poco la presente lettura, fin ch'io possa esplicare quanto dal detto e dimostrato finora, e congiuntamente dalla notizia di alcune conclusioni meccaniche apprese già dal nostro Accademico, sovviemmi adesso di poter soggiugnere per maggior confermazione della verità del principio, che sopra, con probabili discorsi ed esperienze, fu da noi esaminato, anzi, quello che più importa, per geometricamente concluderlo, dimostrando prima un sol lemma elementare nella contemplazione degl' impeti.

Sagr. Mentre tale debba esser l'acquisto, quale V. S. ci promette, non vi è tempo che da me volentierissimo non si spendesse, trattandosi di confermare e interamente stabilire queste scienze del moto: e quanto a me non solo vi concedo il poter soddisfarvi in questo particolare, ma di più pregovi ad appagare quanto prima la curiosità che mi avete in esso svegliata; e credo che il Sig. Simplicio abbia ancora il medesimo sentimento.

Simp. Non posso dire altrimenti.

Salv. Giacchè dunque me ne date licenza, considerisi in primo luogo come effetto notissimo, che i momenti o le velocità di un istesso mobile son diverse sopra diverse inclinazioni di piani, e che la massima è per la linea perpendicolarmente sopra l' orizzonte elevata, e che per l' altre inclinate si diminuisce tal velocità, secondo che quelle più dal perpendicolo si discostano, cioè più obliquamente s' inclinano, onde l' impeto, il talento, l' energia, o vogliamo dire il momento del discendere vien diminuito nel mobile dal piano soggetto, sopra il quale esso mobile s' appoggia e discende.

E per meglio dichiararmi, intendasi la linea AB (*Fig.* 50) perpendicolarmente eretta sopra l' orizzonte AC; pongasi poi

la medesima in diverse inclinazioni verso l' orizzonte piegata come in AD, AE, AF, ec.; dico, l' impeto massimo e totale del grave per discendere esser per la perpendicolare BA, minor di questo per la DA, e minore ancora per la EA, e successivamente andarsi diminuendo per la più inclinata FA, e finalmente esser del tutto estinto nella orizzontale CA, dove il mobile si trova indifferente al moto e alla quiete, e non ha per sè stesso inclinazione di muoversi verso alcuna parte, nè meno alcuna resistenza all' esser mosso; poichè sì come è impossibile che un grave o un composto di essi si muova naturalmente all' insù discostandosi dal comun centro, verso dove cospirano tutte le cose gravi, così è impossibile che egli spontaneamente si muova, se con tal moto il suo proprio centro di gravità non acquista avvicinamento al suddetto centro comune; onde sopra l' orizzontale, che qui s' intende per una superficie egualmente lontana dal medesimo centro, e perciò affatto priva d' inclinazione, nullo sarà l' impeto o momento di detto mobile. Appresa questa mutazione d' impeto, mi fa qui mestieri esplicare quello che in un antico trattato di meccaniche, scritto già in Padova dal nostro Accademico sol per uso de' suoi discepoli, fu diffusamente e concludentemente dimostrato in occasione di considerare la origine e natura del maraviglioso strumento della vite, ed è, con qual proporzione si faccia tal mutazione d' impeto per diverse inclinazioni de' piani, come, per esempio, del piano inclinato AF; tirando la sua elevazione sopra l' orizzonte, cioè la linea FC, per la quale l' impeto di un grave ed il momento del discendere è il massimo, cercasi qual proporzione abbia questo momento al momento dell' istesso mobile per l' inclinata FA; la qual proporzione dico esser reciproca delle dette lunghezze: e questo sia il lemma da premettersi al teorema, che dopo io spero di poter dimostrare. Qui è manifesto, tanto esser l' impeto del discendere di un grave, quanta è la resistenza o forza minima che basta per proibirlo e fermarlo: per tal forza e resistenza e sua misura, mi voglio servire della gravità di un altro mobile. Intendasi ora sopra il piano FA posare il mobile G legato con un filo, che cavalcan-

do sopra l' F abbia attaccato un peso H, e consideriamo che lo spazio della scesa o salita a perpendicolo di esso è ben sempre eguale a tutta la salita o scesa dell' altro mobile G per l' inclinata AF, ma non già alla salita o scesa a perpendicolo, nella qual sola esso mobile G (sì come ogni altro mobile) esercita la sua resistenza, il che è manifesto: imperocchè considerando nel triangolo AFC il moto del mobile G, per esempio all' insù da A in F, esser composto del trasversale orizzontale AC e del perpendicolare CF, ed essendo che quanto all' orizzontale nessuna, come si è detto, è la resistenza del medesimo all' esser mosso (non facendo con tal moto perdita alcuna, nè meno acquisto in riguardo della propria distanza dal comun centro delle cose gravi, che nell' orizzonte si conserva sempre l' istessa), resta la resistenza esser solamente rispetto al dover salire la perpendicolare CF. Mentre che dunque il grave G movendosi da A in F resiste solo nel salire lo spazio perpendicolare CF, ma che l' altro grave H scende a perpendicolo necessariamente quanto tutto lo spazio FA, e che tal proporzione di salita e scesa si mantiene sempre l' istessa, poco o molto che sia il moto dei detti mobili (per esser collegati insieme), possiamo assertivamente affermare, che quando debba seguire l' equilibrio, cioè la quiete tra essi mobili, i momenti, le velocità o le lor propensioni al moto, cioè gli spazi che da loro si passerebbero nel medesimo tempo, devon rispondere reciprocamente alle loro gravità, secondo quello che in tutti i casi de' movimenti meccanici si dimostra, sì che basterà per impedire la scesa del G, che lo H sia tanto men grave di quello, quanto a proporzione lo spazio CF è minore dello spazio FA. Sia fatto dunque come FA ad FC, così il grave G al grave H, che allora seguirà l' equilibrio, cioè i gravi H, G averanno momenti eguali, e cesserà il moto dei detti mobili. E perchè siamo convenuti, che di un mobile tanto sia l' impeto, l'energia, il momento, o la propensione al moto, quanta è la forza o resistenza minima che basta a fermarlo, e s' è concluso che il grave H è bastante a proibire il moto al grave G, adunque il minor peso H, che nella perpendicolare FC eser-

cita il suo momento totale, sarà la precisa misura del momento parziale che il maggior peso G esercita per lo piano inclinato FA; ma la misura del total momento del medesimo grave G è egli stesso (poichè per impedire la scesa perpendicolare di un grave si richiede il contrasto di altrettanto grave, che pur sia in libertà di muoversi perpendicolarmente), adunque l'impeto o momento parziale del G per l'inclinata FA all'impeto massimo e totale dell'istesso G per la perpendicolare FC starà come il peso H al peso G, cioè per la costruzione come essa perpendicore FC, elevazione dell'inclinata, alla medesima inclinata FA, che è quello che per lemma si propose di dimostrare, che dal nostro Autore, come vedranno, vien supposto per noto nella seconda parte della sesta proposizione del presente trattato.

Sagr. Da questo, che V. S. ha concluso fin qui, parmi che facilmente si possa dedurre, argomentando *ex aequali* con la proporzione perturbata, che i momenti dell'istesso mobile per piani diversamente inclinati come FA, FI, che abbiano l'istessa elevazione, son fra loro in reciproca proporzione de' medesimi piani.

Salv. Verissima conclusione. Fermato questo, passerò adesso a dimostrare il teorema, cioè, che

I gradi di velocità di un mobile discendente con moto naturale dalla medesima sublimità per piani in qualsivoglia modo inclinati, all'arrivo all'orizzonte son sempre eguali, rimossi gl'impedimenti.

Qui devesi prima avvertire, che stabilito che in qualsivogliano inclinazioni il mobile dalla partita dalla quiete vada crescendo la velocità o la quantità dell'impeto con la proporzione del tempo (secondo la diffinizione data dall'Autore al moto naturalmente accelerato), onde, come egli ha per l'antecedente proposizione dimostrato, gli spazi passati sono in duplicata proporzione de' tempi, e conseguentemente de' gradi di velocità; quali furono gl'impeti nella prima mossa, tali proporzionalmente saranno i gradi delle velocità guadagnati nell'istesso tempo, poichè e questi e quelli crescono con la medesima proporzione nel medesimo tempo.

Ora sia il piano inclinato AB (*Fig.* 51), la sua elevazione sopra l'orizzonte la perpendicolare AC, e l'orizzontale CB; e perchè, come poco fa si è concluso, l'impeto di un mobile per la perpendicolare AC all'impeto del medesimo per l'inclinata AB sta come AB ad AC, prendasi nell'inclinata AB la AD terza proporzionale delle AB, AC; l'impeto dunque per AC all'impeto per la AB, cioè per la AD, sta come la AC all'AD, e perciò il mobile nell'istesso tempo che passerebbe lo spazio perpendicolare AC, passerà ancora lo spazio AD nell'inclinata AB (essendo i momenti come gli spazj), ed il grado di velocità in C al grado di velocità in D averà la medesima proporzione della AC alla AD; ma il grado di velocità in B al medesimo grado in D sta come il tempo per AB al tempo per AD, per la diffinizione del moto accelerato, ed il tempo per AB al tempo per AD sta, come la medesima AC, media tra le BA, AD, alla AD, per l'ultimo corollario della seconda proposizione; adunque i gradi in B, ed in C al grado in D hanno la medesima proporzione della AC alla AD, e però sono eguali, che è il teorema che intesi di dimostrare.

Da questo potremo più concludentemente provare la seguente terza proposizione dell'Autore, nella quale egli si vale del principio che il tempo per l'inclinata al tempo per la perpendicolare ha l'istessa proporzione di essa inclinata e perpendicolare. Imperocchè diciamo, quando BA sia il tempo per AB, il tempo per AD sarà la media tra esse, cioè la AC, per lo secondo corollario della seconda proposizione; ma quando AC sia il tempo per AD, sarà anco il tempo per AC, per essere le AD, AC scorse in tempi eguali, e però quando BA sia il tempo per AB, AC sarà il tempo per AC; adunque come AB ad AC, così il tempo per AB al tempo per AC.

Col medesimo discorso si proverà che il tempo per AC al tempo per altra inclinata AE, sta come la AC alla AE; adunque *ex aequali* il tempo per l'inclinata AB al tempo dell'inclinata AE sta omologamente come la AB alla AE, ec.

Potevasi ancora dall'istesso progresso del teorema, come vedrà benissimo il Sig. Sagredo, dimostrar immediatamente la

sesta proposizione dell'Autore; ma basti per ora tal digressione, che forse gli è riuscita troppo tediosa, benchè veramente di profitto in queste materie del moto.

Sagr. Anzi di mio grandissimo gusto e necessarissima alla perfetta intelligenza di quel principio.

Salv. Ripiglierò dunque la lettura del testo.

Theorema III, Propositio III.

Si super plano inclinato, atque in perpendiculo, quorum eadem sit altitudo, feratur ex quiete idem mobile, tempora lationum erunt inter se ut plani ipsius et perpendiculi longitudines.

Sit planum inclinatum AC (*Fig.* 52), et perpendiculum AB, quorum eadem sit altitudo supra horizontem CB, nempe ipsamet linea BA: Dico, tempus descensus ejusdem mobilis super plano AC, ad tempus casus in perpendiculo AB, eam habere rationem, quam habet longitudo plani AC ad ipsius perpendiculi AB longitudinem. Intelligantur enim quotlibet lineae DG, EI, FL, horizonti CB parallelae: constat ex assumpto, gradus velocitatis mobilis ex A primo motus initio in punctis GD acquisitos esse aequales, cum accessus ad horizontem aequales sint: similiter gradus in punctis I, E iidem erunt, nec non gradus in L et F. Quod si non hae tantum parallelae, sed ex punctis omnibus lineae AB usque ad lineam AC protractae intelligantur; momenta, seu gradus velocitatum in terminis singularum parallelarum semper erunt inter se paria. Conficiantur itaque spatia duo AC, AB iisdem gradibus velocitatis. Sed demonstratum est, quod si duo spatia conficiantur a mobili, quod iisdem velocitatis gradibus feratur, quam rationem habent ipsa spatia, eandem habent tempora lationum; ergo tempus lationis per AC ad tempus per AB est, ut longitudo plani AC ad longitudinem perpendiculi AB. Quod erat demonstrandum.

Sagr. Parmi che assai chiaramente e con brevità si poteva concludere il medesimo, essendosi già concluso che la somma del moto accelerato dei passaggi per AC, AB è quanto

il moto equabile, il cui grado di velocità sia sudduplo al grado massimo CB; essendo dunque passati li due spazi AC, AB con l'istesso moto equabile, già è manifesto, per la proposizione prima del primo, che i tempi de' passaggi saranno come gli spazi medesimi.

Corollarium.

Hinc colligitur, tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, dum tamen eorum eadem sit elevatio, esse inter se, ut eorum longitudines. Si enim intelligatur aliud planum AM ex A ad eundem horizontem CB terminatum, demonstrabitur pariter, tempus descensus per AM ad tempus per AB esse, ut linea AM ad AB; ut autem tempus AB ad tempus per AC, ita linea AB ad AC: ergo ex aequali, ut AM ad AC, ita tempus per AM ad tempus per AC.

Theorema IV, Propositio IV.

Tempora lationum super planis aequalibus, sed inaequaliter inclinatis, sunt inter se in sudduplo ratione elevationum eorundem planorum permutatim accepta.

Sint ex eodem termino B (*Fig.* 53) plana aequalia, sed inaequaliter inclinata, BA, BC, et ductis AE, CD lineis horizontalibus ad perpendiculum usque BD: esto plani BA elevatio BE, plani vero BC elevatio sit BD, et ipsarum elevationum DB, BE media proportionalis sit BI; constat, rationem DB ad BI esse sudduplam rationis DB ad BE. Dico jam, rationem temporum descensuum, seu lationum super planis BA, BC, esse eandem cum ratione DB ad BI permutatim assumpta: ut scilicet temporis per BA homologa sit elevatio alterius plani BC, nempe BD, temporis vero per BC homologa sit BI. Demonstrandum proinde est, tempus per BA ad tempus per BC esse, ut DB ad BI. Ducatur IS, ipsi DC aequidistans; et quia jam demonstratum est, tempus descensus per BA ad tempus casus per perpendiculum BE esse, ut ipsa BA ad BE: tempus vero per BE ad tempus per BD, ut BE ad BI, tempus vero per BD ad tempus per BC, ut BD ad BC, seu BI ad BS; ergo ex aequali tempus per BA ad tempus per BC erit, ut BA ad

BS, seu CB, ad BS; est autem CB ad BS, ut DB ad BI; ergo patet propositum.

Theorema V, Propositio V.

Ratio temporum descensuum super planis, quorum diversae sint inclinationes et longitudines, nec non elevationes inaequales, componitur ex ratione longitudinum ipsorum planorum, et ex ratione suddupla elevationum eorundem permutatim accepta.

Sint plana AB, AC (*Fig.* 54) diversimode inclinata, quorum longitudines sint inaequales et inaequales quoque elevationes. Dico rationem temporis descensus per AC ad tempus per AB compositam esse ex ratione ipsius AC ad AB, et ex suddupla elevationum earundem permutatim accepta. Ducatur enim perpendiculum AD, cui occurrant horizontales BG, CD, et inter elevationes DA, AG media sit AL; ex puncto vero L ducta parallela horizonti occurrat plano AC in F, erit quoque AF media inter CA, AE. Et quia tempus per AC ad tempus per AE est, ut linea FA ad AE, tempus vero per AE ad tempus per AB, ut eadem AE ad eandem AB: patet, tempus per AC ad tempus per AB esse, ut AF ad AB. Demonstrandum itaque restat, rationem AF ad AB componi ex ratione CA ad AB, et ex ratione GA ad AL, quae est ratio suddupla elevationum DA, AG permutatim accepta. Id autem manifestum fit, posita CA inter FA, AB: ratio enim FA ad AC est eadem cum ratione LA ad AD, seu GA ad AL; quae est suddupla rationis elevationum GA, AD, et ratio CA ad AB est ipsamet ratio longitudinum; ergo patet propositum.

Theorema VI, Propositio VI.

Si a puncto sublimi vel imo circuli ad horizontem erecti ducantur quaelibet plana usque ad circumferentiam inclinata, tempora descensuum per ipsa erunt aequalia.

Sit circulus ad horizontem GH erectus (*Fig.* 55), cujus ex imo puncto, nempe ex contactu cum horizontali, sit erecta diameter FA, et ex puncto sublimi A plana quaelibet inclinentur usque ad circumferentiam AB, AC. Dico, tempora descensuum per ipsa esse aequalia. Ducantur BD, CE ad dia-

metrum perpendiculares, et inter planorum EA, AD altitudines media sit proportionalis AI. Et quia rectangula FAE, FAD aequalia sunt quadratis AC, AB; ut autem rectangulum FAE ad rectangulum FAD, ita EA ad AD; ergo ut quadratum CA ad quadratum AB, ita EA linea ad lineam AD. Verum ut linea EA ad DA, ita quadratum IA ad quadratum AD; ergo quadrata linearum CA, AB sunt inter se, ut quadrata linearum IA, AD, et ideo ut CA linea ad AB, ita IA ad AD. At in praecedenti demonstratum est, rationem temporis descensus per AC ad tempus descensus per AB, componi ex rationibus CA ad AB et DA ad AI, quae est eadem cum ratione BA ad AC; ergo ratio temporis descensus per AC ad tempus descensus per AB componitur ex rationibus CA ad AB, et BA ad AC. Est igitur ratio eorumdem temporum ratio aequalitatis, ergo patet propositum.

Idem aliter demonstratur ex *meis* mechanicis, nempe (*Fig.* 56) mobile temporibus aequalibus pertransire CA, DA. Sit enim BA aequalis ipsi DA, et ducantur perpendiculares BE, DF; constat ex *meis* elementis mechanicis momentum ponderis super plano secundum lineam ABC elevato ad momentum suum totale esse, ut BE ad BA, vel ad DA, ejusdemque ponderis momentum super elevatione AD ad totale suum momentum esse, ut DF ad DA, vel BA: ergo ejusdem ponderis momentum super plano secundum DA inclinato ad momentum super inclinatione secundum ABC est, ut linea DF ad lineam BE. Quare spatia, quae pertransibit idem pondus temporibus aequalibus super inclinationibus CA, DA, erunt inter se, ut lineae BE, DF, ex propositione secunda primi libri *hujus de motu aequabili in eius converso.* Verum ut BE ad DF, ita demonstratur se habere AC ad DA; ergo idem mobile temporibus aequalibus pertransit lineas CA, DA.

Esse autem ut BE ad DF, ita CA ad DA, ita demonstratur:

Jungatur CD, et per D et B ipsi AF parallelae agantur DGL, secans CA in puncto I, et BH: eritque angulus ADI aequalis angulo DCA, cum circumferentiis LA, AD aequalibus insistant, estque angulus DAC communis: ergo triangulorum

aequiangulorum CAD, DAI latera circa aequales angulos proportionalia erunt, et ut CA ad AD, ita DA ad AI, id est BA ad AI, seu HA ad AG, hoc est BE ad DF; quod erat probandum.

Aliter idem magis expedite demonstrabitur sic:

Sit ad horizontem AB (*Fig.* 57) erectus circulus, cujus diameter CD ad horizontem sit perpendicularis; ex termino autem sublimi D inclinetur ad circumferentiam usque quodlibet planum DF. Dico, descensum per planum DF, et casum per diametrum DC ejusdem mobilis temporibus aequalibus absolvi. Ducatur enim FG horizonti AB parallela, quae erit ad diametrum DC perpendicularis, et connectatur FC; et quia tempus casus per DC ad tempus casus per DG est, ut media proportionalis inter CD, DG ad ipsam DG: media autem inter CD, DG est DF, cum angulus DFC in semicirculo sit rectus, et FG perpendicularis ad DC: tempus itaque casus per DC ad tempus casus per DG est ut linea FD ad DG. Sed jam demonstratum est, tempus descensus per DF ad tempus casus per DG esse, ut eadem linea DF ad DG; tempora igitur descensus per DF, et casus per DC ad idem tempus casus per DG eandem habent rationem, ergo sunt aequalia. Similiter demonstrabitur, si ab imo termino C elevetur chorda CE ducta EH horizonti parallela, et juncta ED, tempus descensus per EC aequari tempori casus per diametrum DC.

Corollarium I.

Hinc colligitur tempora descensuum per chordas omnes ex terminis C, seu D perductas, esse inter se aequalia.

Corollarium II.

Colligitur etiam, quod si ab eodem puncto descendant perpendiculum et planum inclinatum, super quae descensus fiant temporibus aequalibus, eadem esse in semicirculo, cujus diameter est perpendiculum ipsum.

Corollarium III.

Hinc colligitur lationum tempora super planis inclinatis tunc esse aequalia, quando elevationes partium aequalium

eorundem planorum fuerint inter se, ut eorundem planorum longitudines: ostensum enim est, tempora per CA, DA in penultima figura esse aequalia, dum elevatio partis AB aequalis AD, nempe BE, ad elevationem DF fuerit, ut CA ad DA.

Corollarium IV (1).

Hinc patet tempora lationum per partes planorum diversimode inclinatorum tunc esse aequalia quando elevationes planorum, vel partium, sint ut quadrata earundem partium, vel sint in dupla ratione ipsarum partium. Quod Galilaeus septimo ostendit theoremate, licet hoc ex ipsa figura hujus sexti theorematis elici potuerit, cum ostensum sit EA, elevationem plani CA, ad DA, elevationem plani BA, ita esse ut quadratum plani CA ad quadratum plani BA; hoc est EA ad DA duplam habere proportionem ejus quam habet EA ad BA.

Sagr. Sospenda in grazia V. S. per un poco la lettura delle cose che seguono, sin che io mi vo risolvendo sopra certa contemplazione che pur ora mi si rivolge per la mente, la quale, quando non sia una fallacia, non è lontana dell'essere uno scherzo grazioso, quali son tutti quelli della natura o della necessità.

È manifesto che se da un punto segnato in un piano orizzontale si faranno produr sopra il medesimo piano infinite linee rette per tutti i versi, sopra ciascuna delle quali s'intenda muoversi un punto con moto equabile, cominciandosi a muover tutti nell'istesso momento di tempo dal segnato punto, e che siano le velocità di tutti eguali, si verranno conseguentemente a figurar da essi punti mobili circonferenze di cerchi tuttavia maggiori e maggiori, concentrici tutti intorno al primo punto segnato, giusto in quella maniera che vediamo farsi dall'ondette dell'acqua stagnante, dopo che da alto vi sia caduto un sassetto, la percossa del quale serve per dar principio di moto verso tutte le parti, e resta come centro di tutti i cerchi che vengon disegnati suc-

(1) È aggiunto dal Viviani.

cessivamente maggiori e maggiori da esse ondette. Ma se noi intenderemo un piano eretto all'orizzonte, ed in esso piano notato un punto sublime, dal quale si partano infinite linee inclinate secondo tutte le inclinazioni sopra le quali ci figuriamo discender mobili gravi, ciascheduno con moto naturalmente accelerato con quelle velocità che alle diverse inclinazioni convengono; posto che tali mobili discendenti fusser continuamente visibili, in che sorte di linee li vedremo noi continuamente disposti? Qui nasce la mia maraviglia, mentre le precedenti dimostrazioni mi assicurano che si vedranno sempre tutti nell' istessa circonferenza di cerchi successivamente crescenti, secondo che i mobili nello scendere si vanno più e più successivamente allontanando dal punto sublime, dove fu il principio della lor caduta: e per meglio dichiararmi segnisi il punto sublime A (*Fig.* 58), dal quale discendano linee secondo qualsivogliano inclinazioni AF, AH, e la perpendicolare AB, nella quale presi i punti C, D descrivansi intorno ad essi cerchi che passino nel punto A, segando le linee inclinate nei punti FHB, EGI. È manifesto, per le antecedenti dimostrazioni, che partendosi nell' istesso tempo dal termine A mobili discendenti per esse linee, quando l'uno sarà in E, l'altro sarà in G e l'altro in I, e così continuando di scendere si troveranno nell' istesso momento di tempo in F, H, B, e continuando di muoversi questi ed altri infiniti per le infinite diverse inclinazioni si troveranno sempre successivamente nelle medesime circonferenze fatte maggiori e maggiori in infinito. Dalle due specie dunque di moti, delle quali la natura si serve, nasce con mirabil corrispondente diversità la generazione di cerchi infiniti. Quella si pone come in sua sede e principio originario nel centro d' infiniti cerchi concentrici; questa si costituisce nel contatto sublime delle infinite circonferenze di cerchi tutti tra loro eccentrici. Quelli nascono da moti tutti eguali ed equabili; questi da moti tutti sempre inequabili in sè stessi, e diseguali l' uno dall' altro tutti che sopra le differenti infinite inclinazioni si esercitano. Ma più aggiunghiamo, che se dai due punti assegnati per le emanazioni noi intenderemo eccitarsi linee non per due su-

perficie sole, orizzontale ed eretta, ma per tutti i versi, sì come da quelle, cominciandosi da un sol punto, si passava alla produzione di cerchi dal minimo al massimo, così cominciandosi da un sol punto si verranno producendo infinite sfere, o vogliam dire una sfera che in infinite grandezze si andrà ampliando. E questo in due maniere: cioè, o col por l'origine nel centro, ovvero nella circonferenza di tali sfere.

Salv. La contemplazione è veramente bellissima e proporzionata all'ingegno del Sig. Sagredo.

Simp. Io resto almeno capace della contemplazione sopra le due maniere del prodursi con li due diversi moti naturali i cerchi e le sfere, sebbene della produzione dipendente dal moto accelerato, e della sua dimostrazione non son del tutto intelligente: tuttavia quel potersi assegnare per luogo di tale emanazione tanto il centro infimo, quanto l'altissima sferica superficie, mi fa credere che possa essere che qualche gran mistero si contenga in queste vere ed ammirande conclusioni; mistero, dico, attenente alla creazione dell'universo (il quale si stima essere di forma sferica) ed alla resistenza della prima causa.

Salv. Io non ho repugnanza al creder l'istesso, ma simili profonde contemplazioni si aspettano a più alte dottrine che le nostre. Ed a noi deve bastare d'esser quei men degni artefici, che dalle fodine scuoprono e cavano i marmi, nei quali poi gli scultori industri fanno apparire maravigliose immagini, che sotto rozza ed informe scorza stavano ascose. Or, se così vi piace, seguiremo avanti.

Theorema VII, Propositio VII.

Si elevationes duorum planorum duplam habuerint rationem ejus, quam habeant eorundem planorum longitudines, lationes ex quiete in ipsis, temporibus aequalibus absolventur.

Sint plana inaequalia et inaequaliter inclinata AE, AB (*Fig.* 59), quorum elevationes sint FA, DA, et quam rationem habet AE ad AB, eandem duplicatam habeat FA ad DA. Dico, tempora lationum super planis AE, AB ex quiete in A esse aequalia. Ductae sint parallelae horizontales ad lineam ele-

vationum EF et BD, quae secet AE in G. Et quia ratio FA ad AD dupla est rationis EA ad AB, et ut FA ad AD, ita EA ad AG; ergo ratio EA ad AG dupla est rationis EA ad AB; ergo AB media est inter EA, AG; et quia tempus descensus per AB ad tempus per AG est ut AB ad AG, tempus autem descensus per AG ad tempus per AE est ut AG ad mediam inter AG, AE, quae est AB; ergo ex aequali tempus per AB ad tempus per AE est ut AB ad se ipsam: sunt igitur tempora aequalia; quod erat demonstrandum.

Theorema VIII, Propositio VIII.

In planis ab eodem sectis circulo ad horizontem erecto, in iis, quae cum termino diametri erecti conveniunt, sive imo, sive sublimi, lationum tempora sunt aequalia tempori casus in diametro: in illis vero, quae ad diametrum non pertingunt, tempora sunt breviora: in eis tandem, quae diametrum secant, sunt longiora.

Circuli ad horizontem erecti esto diameter perpendicularis AB (*Fig.* 60). De planis ex terminis A, B ad circumferentiam usque productis, quod tempora lationum super eis sint aequalia, jam demonstratum est. De plano DF ad diametrum non pertingente, quod tempus descensus in eo sit brevius, demonstratur ducto plano DB, quod et longius erit et minus declive quam DF; ergo tempus per DF brevius quam per DB, hoc est per AB. De plano vero diametrum secante, ut CO, quod tempus descensus in eo sit longius itidem constat; est enim et longius et minus declive quam CB: ergo patet propositum.

Theorema IX, Propositio IX.

Si a puncto in linea horizonti parallela duo plana utcunque inclinentur, et a linea secentur, quae cum ipsis angulos faciat permutatim aequales angulis ab iisdem planis et horizontali contentis, lationes in partibus a dicta linea sectis, temporibus aequalibus absolventur.

Ex puncto C (*Fig.* 61) horizontalis lineae X duo plana utcunque inflectantur CD, CB, et in quolibet puncto lineae CD constituatur angulus CDF, angulo XCE aequalis; secet autem

linea DF planum CE in F, adeo ut anguli CDF, CFD angulis XCE, LCD permutatim sumptis sint aequales. Dico, tempora descensuum per CD, CF esse aequalia. Quod autem (posito angulo CDF aequali angulo XCE) angulus CFD sit aequalis angulo DCL, manifestum est. Dempto enim angulo communi DCF, ex tribus angulis trianguli CDF, aequalibus duobus rectis, quibus aequantur anguli omnes ad lineam LX in puncto C constitutis, remanent in triangulo duo CDF, CFD, duobus XCE, LCD aequales; positus autem est CDF ipsi XCE aequalis: ergo reliquus CFD reliquo DCL. Ponatur planum CE aequale plano CD, et ex punctis D, E perpendiculares agantur DA, EB ad horizontalem XL, ex C vero ad DF ducatur perpendicularis CG. Et quia angulus CDG angulo ECB est aequalis, et recti sunt DGC, CBE, erunt trianguli CDG, CBE aequianguli, et ut DC ad CG, ita CE ad EB: est autem DC aequalis CE; ergo CG aequalis erit BE. Cumque triangulorum DAC, CGF, anguli DCA, CAD angulis GFC, CGF sint aequales; erit, ut CD ad DA, ita FC ad CG, et permutando, ut DC ad CF, ita DA ad CG, seu BE. Ratio itaque elevationum planorum aequalium CD, CE est eadem cum ratione longitudinum DC, CE: ergo ex corollario primo praecedentis propositionis sextae tempora descensuum in ipsis erunt aequalia, quod erat probandum.

Aliter idem; ducta FS perpendiculari ad horizontalem AS. Quia triangulum CSF simile est triangulo DGC, erit, ut SF ad FC, ita GC ad CD. Et quia triangulum CFG simile est triangulo DCA, erit, ut FC ad CG, ita CD ad DA: ergo ex aequali, ut SF ad CG, ita CG ad DA. Media est igitur CG inter SF, DA, et ut DA ad SF, ita quadratum DA ad quadratum CG. Rursus, cum triangulum ACD simile sit triangulo CGF, erit, ut DA ad DC, ita GC ad CF, et permutando ut DA ad CG, ita DC ad CF, et ut quadratum DA ad quadratum CG, ita quadratum DC ad quadratum CF. Sed ostensum est, quadratum DA ad quadratum CG esse, ut linea DA ad lineam FS; ergo ut quadratum DC ad quadratum CF, ita linea DA ad FS; ergo, ex praecedenti septima, cum planorum CD, CF elevationes DA, FS duplam habeant ratio-

nem eorundem planorum, tempora lationum per ipsa erunt aequalia.

Theorema X, Propositio X.

Tempora lationum super diversas planorum inclinationes, quarum elevationes sint aequales, sunt inter se, ut eorundem planorum longitudines, sive fiant lationes ex quiete, sive praecedat illis latio ex eadem altitudine.

Fiant lationes per ABC (*Fig.* 63) et per ABD usque ad horizontem DC, adeo ut latio per AB praecedat lationibus per BD et per BC. Dico, tempus lationis per BD ad tempus per BC esse, ut BD longitudo ad BC. Ducatur AF horizonti parallela, ad quam extendatur DB occurrens in F, et ipsarum DF, FB media sit FE, et ducta EO ipsi DC parallela, erit AO media inter CA, AB. Quod si intelligatur, tempus per AB esse ut AB, erit tempus per FB ut FB. Et tempus per totam AC erit ut media AO, per totam vero FD erit FE. Quare tempus per reliquam BC erit BO, per reliquam vero BD erit BE. Verum ut BE ad BO, ita est BD ad BC; ergo tempora per BD, BC post casus per AB, FB, seu, quod idem est, per communem AB, erunt inter se ut longitudines BD, BC; esse autem tempus per BD ad tempus per BC ex quiete in B, ut longitudo BD ad BC, supra demonstratum est. Sunt igitur tempora lationum per plana diversa, quorum aequales sint elevationes, inter se, ut eorundem planorum longitudines, sive motus fiat in ipsis ex quiete, sive lationibus iisdem praecedat alia latio ex eadem altitudine; quod erat ostendendum.

Theorema XI, Propositio XI.

Si planum, in quo fit motus ex quiete, dividatur utcunque, tempus lationis per priorem partem ad tempus lationis per sequentem est, ut ipsamet prima pars ad excessum, quo eadem pars superatur a media proportionali inter totum planum et primam eandem partem.

Fiat latio per totam AB ex quiete in A (*Fig.* 64), quae in C divisa sit utcunque; totius autem BA et prioris partis AC media sit proportionalis AF: erit CF excessus mediae FA super par-

tem AC. Dico, tempus lationis per AC ad tempus sequentis lationis per CB esse ut AC ad CF. Quod patet: nam tempus per AC ad tempus per totam AB est ut AC ad mediam AF; ergo dividendo, tempus per AC ad tempus per reliquam CB erit ut AC ad CF. Si itaque intelligatur tempus per AC esse ipsamet AC, tempus per CB erit CF; quod est propositum.

Quod si motus non fiat per continuatam ACB, sed per inflexas ACD (*Fig.* 65) usque ad horizontem BD, cui ex F parallela ducta sit FE, demonstrabitur pariter tempus per AC ad tempus per reflexam CD esse ut AC ad CE. Nam tempus per AC ad tempus per CB est ut AC ad CF; tempus vero per CB post AC ad tempus per CD post eundem descensum per AC demonstratum est esse ut CB ad CD, hoc est ut CF ad CE; ergo ex aequali tempus per AC ad tempus per CD erit ut AC linea ad CE.

Theorema XII, Propositio XII.

Si perpendiculum et planum utcunque inclinatum secentur inter easdem horizontales lineas, sumanturque media proportionalia ipsorum, et partium suarum a communi sectione, et horizontali superiori comprehensarum; tempus lationis in perpendiculo ad tempus lationis factae in parte superiori perpendiculi, et consequenter in inferiori secantis plani, eam habebit rationem, quam habet tota perpendiculi longitudo ad lineam compositam ex media in perpendiculo sumpta, et ex excessu, quo totum planum inclinatum suam mediam superat.

Sint horizontes superior AF, inferior CD (*Fig.* 66), inter quos secentur perpendiculum AC, et planum inclinatum DF in B, et totius perpendiculi CA et superioris partis AB media sit AR, totius vero DF et superioris partis BF media sit FS. Dico, tempus casus per totum perpendiculum AC ad tempus per suam superiorem partem AB cum inferiori plano, nempe cum BD, eam habere rationem, quam habet AC ad mediam perpendiculi, scilicet AR cum SD, quae est excessus totius plani DF super suam mediam FS. Connectatur RS, quae erit horizontalibus parallela. Et quia tempus casus per totam AC, ad tempus per partem AB est ut CA ad mediam AR, si in-

telligamus AC esse tempus casus per AC, erit AR tempus casus per AB, et RC per reliquam BC. Quod si tempus per AC ponatur, uti factum est, ipsa AC, tempus per FD erit FD, et pariter concludetur DS esse tempus per BD post FB, seu post AB. Tempus igitur per totam AC est AR cum RC; per inflexas vero ABD, erit AR cum SD: quod erat probandum.

Idem accidit si loco perpendiculi ponatur aliud planum, quale, v. g., NO; eademque est demonstratio.

Problema I, Propositio XIII.

Dato perpendiculo, ad ipsum planum inflectere, in quo, cum ipsum habeat cum dato perpendiculo eandem elevationem, fiat motus post casum in perpendiculo eodem tempore, ac in eodem perpendiculo ex quiete.

Sit datum perpendiculum AB (*Fig.* 67), cui extenso in C ponatur pars BC aequalis, et ducantur horizontales CE, AG. Oportet ex B planum usque ad horizontem CE inflectere, in quo fiat motus post casum ex A eodem tempore, ac in AB ex quiete in A. Ponatur CD aequalis CB, et ducta BD applicetur BE aequalis utrisque BD, DC. Dico BE esse planum quaesitum. Producatur EB occurrens horizonti AG in G, et ipsarum EG GB media sit GF. Erit EF ad FB ut EG ad GF, et quadratum EF ad quadratum FB ut quadratum EG ad quadratum GF, hoc est ut linea EG ad GB; est autem EG dupla GB; ergo quadratum EF duplum quadrati FB: verum quadratum quoque DB duplum est quadrati BC; ergo ut linea EF ad FB, ita DB ad BC, et componendo, et permutando, ut EB ad duas DB, BC, ita BF ad BC; sed BE duabus DB, BC est aequalis; ergo BF ipsi BC, seu BA, aequalis est. Si igitur intelligatur AB esse tempus casus per AB, erit GB tempus per GB, et GF tempus per totam GE; ergo BF erit tempus per reliquam BE, post casum ex G, seu ex A. Quod erat propositum.

Problema II, Propositio XIV.

Dato perpendiculo et plano ad eum inclinato, partem in perpendiculo superiori reperire, quae ex quiete conficiatur tem-

pore aequali ei, quo conficitur planum inclinatum post casum in parte reperta in perpendiculo.

Sit perpendiculum DB (*Fig.* 68), et planum ad ipsum inclinatum AC. Oportet in perpendiculo AD partem reperire, quae ex quiete conficiatur tempore aequali ei, quo post casum in ea conficitur planum AC. Ducatur horizontalis CB, et ut BA cum dupla AC ad AC, ita fiat CA ad AE, et ut BA ad AC, ita fiat EA ad AR, et ab R ducatur perpendicularis RX ad DB; dico X esse punctum quaesitum. Et quia ut BA cum dupla AC ad AC, ita CA ad AE, dividendo erit, ut BA cum AC ad AC, ita CE ad EA, et quia ut BA ad AC, ita EA ad AR, erit componendo, ut BA cum AC ad AC, ita ER ad RA. Sed ut BA cum AC ad AC, ita est CE ad EA; ergo ut CE ad EA, ita ER ad RA, et ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe CR ad RE. Sunt itaque CR, RE, RA proportionales. Amplius, quia ut BA ad AC, ita posita est EA ad AR, et propter similitudinem triangulorum ut BA ad AC, ita XA ad AR; ergo ut EA ad AR, ita XA ad AR: sunt itaque EA, XA aequales. Modo si intelligamus tempus per RA esse ut RA, tempus per RC erit RE, media inter CR, RA; et AE erit tempus per AC post RA, sive post XA; verum tempus per XA est XA, dum RA est tempus per RA. Ostensum autem est XA, AE esse aequales: ergo patet propositum.

PROBLEMA III, PROPOSITIO XV.

Dato perpendiculo et plano ad ipsum inflexo, partem in perpendiculo infra extenso reperire, quae tempore eodem conficiatur; ac planum inflexum post casum ex dato perpendiculo.

Sit perpendiculum AB (*Fig.* 69), et planum ad ipsum inflexum BC. Oportet in perpendiculo infra extenso partem reperire, quae ex casu ab A conficiatur tempore eodem, atque BC ex eodem casu ab A. Ducatur horizontalis AD, cui occurrat CB extensa in D, et ipsarum CD, DB media sit DE, et BF ponatur aequalis BE, deinde ipsarum BA, AF tertia proportionalis sit AG. Dico BG esse spatium, quod post casum AB conficitur tempore eodem, ac planum BC post eundem casum.

Si enim ponamus tempus per AB esse ut AB, erit tempus per DB ut DB, et quia DE est media inter BD, DC, erit eadem DE tempus per totam DC, et BE tempus per reliquam BC ex quiete in D, seu ex casu AB; et similiter concludetur BF esse tempus per BG, post casum eundem: est autem BF aequalis BE: ergo patet propositum.

Theorema XIII, Propositio XVI.

Si plani inclinati et perpendiculi partes, quarum tempora lationum ex quiete sint aequalia, ad idem punctum componantur, mobile veniens ex qualibet altitudine sublimiori citius absolvet eandem partem plani inclinati, quam ipsam partem perpendiculi.

Sit perpendiculum EB (*Fig.* 70), et planum inclinatum CE ad idem punctum E composita, quorum tempora lationum ex quiete in E sint aequalia, et in perpendiculo extenso sumptum sit quodlibet punctum sublime A, ex quo demittantur mobilia. Dico, tempore breviori absolvi planum inclinatum EC, quam perpendiculum EB post casum AE. Jungatur CB, et ducta horizontali AD, extendatur CE illi occurrens in D, et CD, DE media proportionalis sit DF, ipsarum vero BA, AE media sit AG, et ducantur FG, DG. Et quia tempora lationum per EC, EB ex quiete in E sunt aequalia, erit angulus C rectus, ex corollario secundo propositionis sextae: estque rectus A, et anguli ad verticem E aequales: triangula igitur AED, CEB sunt aequiangula, et latera circa aequales angulos proportionalia; ergo ut BE ad EC, ita DE ad EA. Rectangulum ergo BEA est aequale rectangulo CED: et quia rectangulum CDE superat rectangulum CED quadrato ED, rectangulum vero BAE superat rectangulum BEA quadrato EA; excessus rectanguli CDE super rectangulo BAE, hoc est quadrati FD super quadrato AG, erit idem cum excessu quadrati DE super quadrato AE, qui excessus est quadratum DA: est igitur quadratum FD aequale duobus quadratis GA, AD, quibus est quoque aequale quadratum GD; ergo linea DF ipsi DG est aequalis, et angulus DGF aequalis angulo DFG, et angulus EGF minor angulo EFG, et latus oppositum EF minus latere EG. Modo si intelligamus tempus casus per

AE esse ut AE, erit tempus per DE ut DE, cumque AG media sit inter BA, AE, erit AG tempus per totam AB, et reliqua EG erit tempus per reliquam EB ex quiete in A, et similiter concludetur EF esse tempus per EC post descensum DE, seu post casum AE; demonstratum autem est EF minorem esse quam EG: ergo patet propositum.

COROLLARIUM.

Ex hac, atque ex praecedenti constat, spatium, quod conficitur in perpendiculo post casum ex sublimi, tempore eodem quo conficitur planum inclinatum, minus esse eo, quod conficitur tempore eodem atque in inclinato non praecedente casu ex sublimi, majus tamen quam idem planum inclinatum: cum enim modo demonstratum sit, quod mobilium venientium ex termino sublimi A (*Fig.* 71) tempus conversi per EC brevius sit tempore procedentis per EB, constat, spatium, quod conficitur per EB tempore aequali tempori per EC, minus esse toto spatio EB. Quod autem idem spatium perpendiculi majus sit quam EC, manifestum fit sumpta figura praecedentis propositionis, in qua partem perpendiculi BG confici demonstratum est tempore eodem cum BC post casum AB: hanc autem BG majorem esse quam BC, sic colligitur. Cum BE, FB aequales sint, BA vero minor BD, majorem rationem habet FB ad BA, quam EB ad BD, et componendo, FA ad AB majorem habet, quam ED ad DB; est autem ut FA ad AB, ita GF ad FB (est enim AF media inter BA, AG), et similiter ut ED ad BD, ita est CE ad EB; ergo GB ad BF majorem habet rationem quam CB ad BE: est igitur GB major BC.

PROBLEMA IV, PROPOSITIO XVII.

Dato perpendiculo et plano ad ipsum inflexo, in dato plano partem signare, in qua post casum in perpendiculo fiat motus tempore aequali ei, quo mobile datum perpendiculum ex quiete confecit.

Sit perpendiculum AB (*Fig.* 72), et ad ipsum planum inflexum BE: oportet in BE spatium signare, per quod mo-

bile post casum in AB moveatur tempore aequali ei, quo ipsum perpendiculum AB ex quiete confecit.

Sit horizontalis linea AD, cui occurrat in D planum extensum, et accipiatur FB aequalis BA, et fiat ut BD ad DF, ita FD ad DE. Dico, tempus per BE post casum in AB aequari tempori per AB ex quiete in A. Si enim intelligatur AB esse tempus per AB, erit DB tempus per DB. Cumque sit, ut BD ad DF, ita FD ad DE, erit DF tempus per totum planum DE, et BF per partem BE ex D; sed tempus per BE post DB est idem ac post AB; ergo tempus per BE post AB erit BF, aequale scilicet tempori AB, ex quiete in A: quod erat propositum.

Problema V, Propositio XVIII.

Dato in perpendiculo quovis spatio a principio lationis signato, quod in dato tempore conficiatur, datoque quocunque alio tempore minori, aliud spatium eidem aequale *in perpendiculo eodem reperire, quod in dato tempore minori conficiatur.*

Sit perpendiculum A (*Fig.* 73), in quo detur spatium AB, cujus tempus ex principio A sit AB, sitque horizon CBE, et detur tempus ipso AB minus, cui in horizonte notetur aequale BC: oportet in eodem perpendiculo spatium eidem AB aequale reperire, quod tempore BC conficiatur. Jungatur linea AC. Cumque BC minor sit BA, erit angulus BAC minor angulo BCA. Constituatur ei aequalis CAE, et linea AE horizonti occurrat in puncto E, ad quam perpendicularis ponatur ED secans perpendiculum in D, et linea DF ipsi BA secetur aequalis. Dico ipsam FD esse perpendiculi partem, in qua latio ex principio motus in A absolvitur tempore BC dato. Cum enim in triangulo rectangulo AED ab angulo recto E perpendicularis ad latus oppositum AD ducta sit EB, erit AE media inter DA, AB, et BE media inter DB, BA, seu inter FA, AB (est enim FA ipsi DB aequalis). Cumque AB positum sit esse tempus per A, erit AE seu EC tempus per totam AD, et EB tempus per AF; ergo reliqua BC erit tempus per reliquam FD: quod erat intentum.

PROBLEMA VI, PROPOSITIO XIX.

Dato in perpendiculo spatio quocunque a principio lationis peracto, datoque tempore casus, tempus reperire, quo aliud aequale spatium ubicunque in eodem perpendiculo acceptum, ab eodem mobili consequenter conficiatur.

Sit in perpendiculo AB (*Fig.* 74) quodcunque spatium AC ex principio lationis in A acceptum, cui aequale sit aliud spatium DB ubicunque acceptum, sitque datum tempus lationis per AC, sitque illud AC. Oportet reperire tempus lationis per DB post casum ex A. Circa totam AB semicirculus describatur AEB, et ex C ad AB perpendicularis sit CE, et jungatur AE, quae major erit quam EC. Secetur EF ipsi EC aequalis; dico reliquum FA esse tempus lationis per DB. Quia enim AE est media inter BC, AC; estque AC tempus casus per AC; erit AE tempus per totam AB. Cumque CE media sit inter DA, AC (est enim DA aequalis ipsi BC), erit CE, hoc est EF, tempus per AD; ergo reliqua AF est tempus per reliquam DB, quod est propositum.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur, quod si alicujus spatii ponatur tempus ex quiete esse ut ipsummet spatium; tempus illius post aliud spatium adjunctum erit excessus medii inter adjunctum una cum spatio, et ipsum spatium super medium inter primum et adjunctum. Veluti posito, quod tempus per AB (*Fig.* 75) ex quiete in A sit AB, addito AS, tempus per AB post SA erit excessus medii inter SB, BA super medium inter BA, AS. *Hoc est, erit BD excessus mediae BC super mediam CA, sive CD.*

PROBLEMA VII, PROPOSITIO XX.

Dato quolibet spatio, et parte in eo post principium lationis, partem alteram versus finem reperire, quae conficiatur tempore eodem ac prima data.

Sit spatium CB (*Fig.* 76), et in eo pars CD data post principium lationis in C. Oportet partem alteram versus finem B reperire, quae conficiatur tempore eodem ac data CD. Sumatur

media inter BC, CD, cui aequalis ponatur BA; et ipsarum BC, CA tertia proportionalis sit CE. Dico, EB esse spatium, quod post casum ex C conficitur tempore eodem ac ipsum CD. Si enim intelligamus, tempus per totam CB esse ut CB, erit BA (media scilicet inter BC, CD) tempus per CD. Cumque CA media sit inter BC, CE, erit CA tempus per CE; est autem tota BC tempus per totam CB; ergo reliqua BA erit tempus per reliquam EB post casum ex C; eadem vero BA fuit tempus per CD; ergo temporibus aequalibus conficiuntur CD et EB ex quiete in A; quod erat faciendum.

Theorema IV, Propositio XXI.

Si in perpendiculo fiat casus ex quiete, in quo a principio lationis sumatur pars quovis tempore peracta, post quam sequatur motus inflexus per aliquod planum utcunque inclinatum, spatium, quod in tali plano conficitur in tempore aequali tempori casus jam peracti in perpendiculo, ad spatium jam peractum in perpendiculo, majus erit quam duplum, minus vero quam triplum.

Infra horizontem AE (*Fig* 77) sit perpendiculum AB, in quo ex principio A fiat casus, cujus sumatur quaelibet pars AC; inde ex C inclinetur utcunque planum CG; super quo post casus in AC continuetur motus. Dico, quod spatium tali motu peractum per CG in tempore aequali tempori casus per AC, est plus quam duplum, minus vero quam triplum ejusdem spatii AC. Ponatur enim CF aequalis AC, et extenso plano GC usque ad horizontem in E, fiat ut CE ad EF, ita FE ad EG. Si itaque ponatur tempus casus per AC esse ut linea AC, erit CE tempus per EC et CF, seu CA, tempus motus per CG. Ostendendum itaque est, spatium CG ipso CA majus esse quam duplum, minus vero quam triplum. Cum enim sit, ut CE ad EF, ita FE ad EG, erit etiam ita CF ad FG. Minor autem est EC quam EF, quare et CF minor erit quam FG, et CG major quam dupla FC, seu AC. Cumque rursus FE minor sit quam dupla ad EC (est enim EC major CA, seu CF), erit quoque GF minor quam dupla ad FC, et GC minor quam tripla ad CF, seu CA. Quod erat demostrandum.

Poterat autem universalius idem proponi: quod enim accidit in perpendiculari et plano inclinato, contingit etiam si post motum in plano quodam inclinato inflectatur per magis inclinatum; ut videtur in altera figura: eademque est demonstratio.

PROBLEMA VIII, PROPOSITIO XXII.

Datis duobus temporibus inaequalibus et spatio, quod in perpendiculo ex quiete conficitur tempore breviori ex datis: a puncto supremo perpendiculi usque ad horizontem planum inflectere, super quo mobile descendat tempore aequali longiori ex datis.

Tempora inaequalia sint, A majus (*Fig.* 78), B vero minus; spatium autem, quod in perpendiculo conficitur ex quiete in tempore B, sit CD. Oportet ex termino C planum usque ad horizontem inflectere, quod tempore A conficiatur. Fiat ut B ad A, ita CD ad aliam lineam, cui linea CX aequalis ex C ad horizontem descendat: manifestum est, planum CX esse illud, super quo mobile descendit tempore dato A. Demonstratum enim est, tempus per planum inclinatum ad tempus in sua elevatione eam habere rationem, quam habet plani longitudo ad longitudinem elevationis suae. Tempus igitur per CX ad tempus per CD est ut CX ad CD, hoc est ut tempus A ad tempus B; tempus vero B est illud, quo conficitur perpendiculum CD ex quiete; ergo tempus A est illud, quo conficitur planum CX.

PROBLEMA IX, PROPOSITIO XXIII.

Dato spatio quovis tempore peracto ex quiete in perpendiculo, ex termino imo hujus spatii planum inflectere, super quo post casum in perpendiculo tempore eodem conficiatur spatium cuilibet spatio dato aequale; quod tamen majus sit quam duplum, minus vero quam triplum spatii peracti in perpendiculo.

Sit in perpendiculo AS (*Fig.* 79) tempore AC peractum spatium AC ex quiete in A, cujus IR majus sit quam duplum, minus vero quam triplum. Oportet ex termino C planum inflectere super quo mobile eodem tempore AC conficiat post casum per CA spatium ipsi IR aequale. Sint RN, NM ipsi AC

aequalia, et quam rationem habet residuum IM ad MN, eandem habeat AC linea ad aliam, cui aequalis applicetur CE ex C ad horizontem AE, quae extendatur versus O, et accipiantur CF, FG, GO aequales ipsis RN, NM, MI. Dico, tempus super inflexa CO, post casum AC, esse aequale tempori AC ex quiete in A. Cum enim sit, ut OG ad GF, ita FC ad CE; erit componendo, ut OF ad FG, seu FC, ita FE ad EC, et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia ad omnia: nempe tota OE ad EF, ut FE ad EC. Sunt itaque OE, EF, EC continue proportionales; quod cum positum sit, tempus per AC esse ut AC, erit CE tempus per EC, et EF tempus per totam EO, et reliquum CF per reliquam CO; est autem CF aequalis ipsi CA; ergo factum est quod fieri oportebat; est enim tempus CA tempus casus per AC ex quiete in A, CF vero (quod aequatur CA) est tempus per CO post descensum per EC, seu post casum per AC; quod est propositum. Notandum autem est, quod idem accidet, si praecedens latio non in perpendiculo fiat, sed in plano inclinato, ut in sequenti figura, in qua latio praecedens facta sit per planum inclinatum AS infra horizontem AE; et demonstratio est prorsus eadem.

SCHOLIUM.

Si diligenter attendatur, manifestum erit, quod quo minus data linea IR deficit a tripla ipsius AC (*Fig.* 80), eo planum inflexum, super quod facienda est secunda latio, puta CO, accedit vicinius ad perpendiculum, in quo tandem in tempore aequali AC conficitur spatium ad AC triplum. Cum enim IR proxima fuerit ad triplicitatem AC, erit IM aequalis fere ipsi MN. Cumque, ut IM ad MN in constructione, ita fiat AC ad CE, constat, ipsam CE paulo majorem reperiri quam CA, et quod consequens est, punctum E proximum reperiri puncto A, et CO cum CS acutissimum angulum continere, et fere mutuo coincidere. E contra vero, si data IR minimum quid major fuerit quam dupla ejusdem AC, erit IM brevissima linea: ex quo accidet, minimam quoque futuram esse AC respectu CE, quae longissima erit, et quam proxime accedet ad parallelam

horizontalem per C productam. Indeque colligere possumus, quod, si in apposita figura post descensum per planum inclinatum AC fiat reflexio per lineam horizontalem, qualis esset CT, spatium, tempore aequali tempori descensus per AC, per quod mobile consequenter moveretur, esset duplum spatii AC exacte. Videtur autem et hic accommodari consimilis ratiocinatio. Apparet enim ex eo, cum OE ad EF sit ut FE ad EC, ipsam FC determinare tempus per CO. Quod si pars horizontalis TC, dupla CA, divisa sit, bifariam in V extensa versus X in infinitum elongata erit, dum occursum cum producta AE quaerit, et ratio infinite TX ad infinitam VX non erit alia a ratione infinitae VX ad infinitam XC.

Istud idem alia aggressione concludere poterimus, consimile resumentes ratiocinium ei, quo usi sumus in propositionis primae demonstratione. Resumentes enim triangulum ABC (*Fig.* 81), nobis repraesentans in suis parallelis basi BC velocitatis gradus continue adauctos juxta temporis incrementa, ex quibus, cum infinitae sint, veluti infinita sunt puncta in linea AC, et instantia in quovis tempore, exurget superficies ipsa trianguli. Si intelligamus, motum per alterum tantum temporis continuari, sed non amplius motu accelerato, verum aequabili, juxta maximum gradum velocitatis acquisitae, qui gradus repraesentatur per lineam BC; ex talibus gradibus conflabitur aggregatum consimile parallelogrammo ADBC, quod duplum est trianguli ABC. Quare spatium, quod cum gradibus consimilibus tempore eodem conficietur, duplum erit spatii peracti cum gradibus velocitatis a triangulo ABC repraesentatis. At in plano horizontali motus est aequabilis, cum nulla ibi sit causa accelerationis, aut retardationis; ergo concluditur, spatium CD, peractum tempore aequali tempori AC, duplum esse spatii AC; hoc enim motu ex quiete accelerato juxta parallelas trianguli conficitur; illud vero juxta parallelas parallelogrammi, quae, dum fuerint infinitae, duplae sunt ad parallelas infinitas trianguli.

Attendere insuper licet, quod velocitatis gradus, quicunque in mobili reperiatur, est in illo suapte natura indelebiliter impressus, dum externae causae accelerationis, aut retar-

dationis tollantur, quod in solo horizontali plano contingit: nam in planis declivibus adest jam causa accelerationis majoris, in acclivibus vero retardationis. Ex quo pariter sequitur motum in horizontali esse quoque aeternum: si enim est aequabilis, non debilitatur, aut remittitur, et multo minus tollitur. Amplius, existente gradu celeritatis per naturalem descensum a mobili acquisito suapte natura indelebili, atque aeterno, considerandum occurrit, quod si post descensum per planum declive fiat reflexio per aliud planum acclive, jam in isto occurrit causa retardationis: in tali enim plano idem mobile naturaliter descendit; quare mixtio quaedam contrariarum affectionum exurgit, nempe gradus illius celeritatis acquisitae in praecedenti descensu, qui per se uniformiter mobile in infinitum adduceret, et naturalis propensionis ad motum deorsum juxta illam eandem proportionem accelerationis, juxta quam semper movetur. Quare admodum rationabile videbitur, si inquirentes, quaenam contingant accidentia dum mobile post descensum per aliquod planum inclinatum reflectatur per planum aliquod acclive, accipiamus gradum illum maximum in descensu acquisitum, idem per se perpetuo in ascendente plano servari; attamen in ascensu ei supervenire naturalem inclinationem deorsum, motum nempe ex quiete acceleratum juxta semper acceptam proportionem. Quod si forte haec intelligere fuerit subobscurum, clarius per aliquam delineationem explicabitur.

Intelligatur itaque, factum esse descensum per planum declive AB (*Fig.* 82), ex quo per aliud acclive BC continuetur motus reflexus, et sint primo plana aequalia, et ad aequales angulos super horizontem GH elevata. Constat jam, quod mobile ex quiete in A descendens per AB gradus acquirit velocitatis juxta temporis ipsius incrementum: gradum vero in B esse maximum acquisitorum, et suapte natura immutabiliter impressum, sublatis scilicet causis accelerationis novae, aut retardationis: accelerationis, inquam, si adhuc super extenso plano ulterius progrederetur; retardationis vero, dum super planum acclive BC sit reflexio: in horizontali autem GH aequabilis motus juxta gradum velocitatis ex A in B acquisitae in

infinitum extenderetur; esset autem talis velocitas, ut in tempore aequali tempori descensus per AB in horizonte conficeret spatium duplum ipsius AB. Modo fingamus, idem mobile eodem celeritatis gradu aequabiliter moveri per planum BC, adeo ut etiam in hoc tempore aequali tempori descensus per AB conficeret super BC extenso spatium duplum ipsius AB. Verum intelligamus statim atque ascendere incipit, ei suapte natura supervenire illud idem, quod ei contigit ex A super planum AB, nempe descensus quidam ex quiete secundum gradus eosdem accelerationis, vi quorum, ut in AB contigit, tempore eodem tantumdem descendat in plano reflexo, quantum descendit per AB; manifestum est, quod ex ejusmodi mixtione motus aequabilis ascendentis, et accelerati descendentis perducetur mobile ad terminum C per planum BC, juxta eosdem velocitatis gradus, qui erunt aequales. Quod vero sumptis utcunque duobus punctis D, E, aequaliter ab angulo B remotis, transitus per DB fiat tempore aequali tempori reflexionis per BE, hinc colligere possumus. Ducta DF erit parallela ad BC; constat enim, descensum per AD reflecti per DF, quod si post D mobile feratur per horizontalem DE, impetus in E erit idem cum impetu in D; ergo ex E ascendet in C, ergo gradus velocitatis in D est aequalis gradui in E. Ex his igitur rationabiliter asserere possumus, quod, si per aliquod planum inclinatum fiat descensus, post quem sequatur reflexio per planum elevatum, mobile per impetum conceptum ascendet usque ad eandem altitudinem, seu elevationem ab horizonte. Ut si fiat descensus per AB, feretur mobile per planum reflexum BC usque ad horizontalem AC; non tantum si inclinationes planorum sint aequales, verum etiam si inaequales sint, qualis est plani BD; assumptum enim prius est, gradus velocitatis esse aequales, qui super planis inaequaliter inclinatis acquiruntur, dum ipsorum planorum eadem fuerit supra horizontem elevatio. Si autem existente eadem inclinatione planorum EB, BD (*Fig.* 83), descensus per EB impellere valet mobile per planum BD usque ad D, cum talis impulsus fiat propter conceptum velocitatis impetum in puncto B; sitque idem impetus in B, seu descendat mobile per AB, seu per EB; constat, quod

expelletur pariter mobile per BD, post descensum per AB, atque per EB. Accidet vero, quod tempus ascensus per BD longius erit quam per BC, prout descensus quoque per EB longiori sit tempore quam per AB: ratio autem eorundem temporum jam demonstrata est eadem, ac longitudinum ipsorum planorum. Sequitur modo ut inquiramus proportionem spatiorum temporibus aequalibus peractorum in planis, quorum diversae sint inclinationes, eaedem tamen elevationes: hoc est, quae inter easdem parallelas horizontales comprehendantur. Id autem contingit juxta sequentem rationem.

Theorema XV, Propositio XXIV.

Dato inter easdem parallelas horizontales perpendiculo, et plano elevato ab ejus imo termino, spatium, quod a mobili, post casum in perpendiculo, super plano elevato conficitur in tempore aequali tempori casus, majus est ipso perpendiculo, minus tamen quam duplum ejusdem perpendiculi.

Inter easdem parallelas horizontales BC, HG (*Fig.* 84) sint perpendiculum AE et planum elevatum EB, super quo, post casum in perpendiculo AE, ex termino E fiat reflexio versus B. Dico, spatium, per quod mobile ascendit in tempore aequali tempori descensus AE, majus esse quam AE, minus vero quam duplum ejusdem AE. Ponatur ED, ipsi AE aequale, et ut EB ad BD, ita fiat DB ad BF. Ostendetur primo, punctum F esse signum, quo mobile motu reflexo per EB perveniet tempore aequali tempori AE; deinde, EF majus esse quam EA, minus vero quam duplum ejusdem. Si intelligamus, tempus descensus per AE esse ut AE, erit tempus descensus per BE, seu ascensus per EB, ut ipsa linea BE; cumque DB media sit inter EB, BF, sitque BE tempus descensus per totam BE, erit BD tempus descensus per BF, et reliqua DE tempus descensus per reliquam FE. Verum idem est tempus per FE ex quiete in B, atque tempus ascensus per EF, dum in E fuerit velocitatis gradus per descensum BE, seu AE, acquisitus; ergo idem tempus DE erit id, in quo mobile, post casum ex A per AE, motu reflexo per EB, pervenit ad signum F. Positum autem est, ED esse aequale ipsi AE, quod

erat primo ostendendum. Et quia, ut tota EB ad totam BD, ita ablata DB ad ablatam BF, erit, ut tota EB ad totam BD ita reliqua ED ad DF. Est autem EB major BD: ergo et ED major DF, et EF minor quam dupla DE, seu AE; quod erat ostendendum. Idem autem accidet si motus praecedens non in perpendiculo, sed in plano inclinato fiat; eademque est demonstratio, dummodo planum reflexum sit minus acclive, nempe longius plano declivi.

Theorema XVI, Propositio XXV.

Si post casum per aliquod planum (1) *sequatur motus per planum horizontis, erit tempus casus per planum inclinatum ad tempus motus per quamlibet lineam horizontis, ut dupla longitudo plani inclinati ad lineam acceptam horizontis.*

Sit linea horizontis CB (*Fig.* 85), planum inclinatum *vel perpendiculare* AB, et post casum per AB sequatur motus *velocitate acquisita post ipsum casum, quae servatur aequabilis*, per horizontem, in quo sumatur quodlibet spatium BD. Dico tempus casus per AB ad tempus motus per BD esse ut dupla AB ad BD. Sumpta enim BC ipsius AB dupla, constat ex praedemonstratis, tempus casus per AB aequari tempori motus per BC: sed tempus motus per BC ad tempus motus per DB est ut linea CB ad lineam BD, *velocitas enim per utranque est eadem;* ergo tempus motus per AB ad tempus per BD est ut dupla AB ad BD, *vel ut AB ad dimidium BD:* quod erat probandum.

Problema X, Propositio XXVI.

Dato perpendiculo inter lineas parallelas horizontales, datoque spatio majori eodem perpendiculo, sed minori quam duplo ejusdem, ex imo termino perpendiculi planum attollere inter easdem parallelas, super quo motu reflexo post descensum in perpendiculo conficiat mobile spatium dato aequale, et in tempore aequali tempori descensus in perpendiculo.

Inter parallelas horizontales AO, BC (*Fig.* 86) sit per-

(1) Il Viviani toglie qui la parola *inclinatum* per rendere la proposizione più generale, come appresso dichiara con l'aggiungere *vel perpendiculare.*

pendiculum AB; FE vero major sit quam BA, minor vero quam dupla ejusdem. Oportet ex B planum inter horizontales erigere, super quo mobile, post casum ex A in B, motu reflexo, in tempore aequali tempori descensus per AB conficiat ascendendo spatium aequale ipsi EF. Ponatur ED aequalis AB, erit reliqua DF minor, cum tota EF minor sit quam dupla AB: sit DI aequalis DF, et ut EI ad ID, ita fiat DF ad aliam FX, atque ex B reflectatur recta BO aequalis EX. Dico, planum per BO esse illud, super quo, post casum AB, mobile in tempore aequali tempori casus per AB pertransit ascendendo spatium aequale dato spatio EF. Ipsis ED, DF aequales ponantur BR, RS. Cum enim sit, ut EI ad ID, ita DF ad FX: erit componendo, ut ED ad DI, ita DX ad XF; hoc est, ut ED ad DF, ita DX ad XF, et EX ad XD; hoc est, ut BO ad OR, ita RO ad OS. Quod si ponamus, tempus per AB esse AB, erit tempus per OB ipsa OB; et RO tempus per OS; et reliqua BR tempus per reliquum SB, descendendo ex O in B. Sed tempus descensus per SB ex quiete in O est aequale tempori ascensus ex B in S post descensum AB: ergo BO est planum ex B elevatum, super quo post descensum per AB conficitur tempore BR, seu BA, spatium BS, aequale spatio dato EF. Quod facere oportebat.

Theorema XVII, Propositio XXVII.

Si in planis inaequalibus, quorum eadem sit elevatio, descendat mobile, spatium, quod in ima parte longioris conficitur in tempore aequali ei, in quo conficitur totum planum brevius, est aequale spatio, quod componitur ex ipso breviori plano, et ex parte, ad quam idem brevius planum eam habet rationem, quam habet planum longius ad excessum, quo longius brevius superat.

Sit planum AC longius (*Fig.* 87), AB vero brevius, quorum eadem sit elevatio AD; et ex ima parte AC sumatur CE aequale ipsi AB; et quam rationem habet totum CA ad AE (nempe ad excessum plani CA super AB), hanc habeat CE ad EF. Dico, spatium FC esse illud, quod conficitur post discessum ex A tempore aequali tempori descensus per AB. Cum enim totum CA ad totum AE sit ut ablatum CE ad abla-

tum EF; erit reliquum EA ad reliquum AF ut totum CA ad totum AE. Sunt itaque tres CA, AE, AF continue proportionales. Quod si ponatur, tempus per AB esse ut AB; erit tempus per AC ut AC, tempus vero per AF erit ut AE, et per reliquum FC erit ut EC; est autem EC ipsi AB aequale: ergo fit propositum.

Theorema XVIII, Propositio XXVIII.

Tangat horizontalis linea AG circulum (*Fig.* 88), et a contactu sit diameter AB, et duae chordae utcunque AEB. Determinanda sit ratio temporis casus per AB ad tempus descensus per ambas AEB. Extendatur BE usque ad tangentem in G, et angulus BAE bifariam secetur, ducta AF. Dico tempus per AB ad tempus per AEB esse ut AE ad AEF, *vel ut AB ad ABF, quod in triangulo BAE angulus ad A bifariam secetur in constructione a recta AF.* Cum enim angulus FAB aequalis sit angulo FAE; angulus vero EAG angulo ABF; erit totus GAF duobus FAB, ABF aequalis; quibus aequatur quoque angulus GFA; ergo linea GF ipsi GA est aequalis. Et quia rectangulum BGE aequatur quadrato GA; erit quoque aequale quadrato GF, et tres lineae BG, GF, GE proportionales. Quod si ponatur, AE esse tempus per AE, erit GE tempus per GE, et GF tempus per totam GB, et EF tempus per EB, post descensum ex G, seu ex A, per AE. Tempus igitur per AE, seu per AB, ad tempus per AEB est ut AE ad AEF; quod erat determinandum.

Aliter brevius. Secetur GF aequalis GA; constat, GF esse mediam proportionalem inter BG, GE. Reliqua ut supra.

Problema XI, Propositio XXIX.

Dato quolibet spatio horizontali, ex cujus termino erectum sit perpendiculum, vel aliud quodcunque planum quomodolibet inclinatum, *in quo sumatur pars aequalis dimidio spatii in horizontali dato, mobile ex tali altitudine descendens, et in horizontali conversum, conficiet horizontale spatium una cum perpendiculo breviori tempore, quam quodcunque aliud spatium perpendiculi cum eodem spatio horizontali.*

Sit planum horizontale, in quo datum sit quodlibet spatium BC (*Fig.* 89), et ex termino B sit perpendiculum, in quo BA sit dimidium ipsius BC. Dico, tempus, quo mobile ex A demissum conficiet ambo spatia AB, BC, esse temporum omnium brevissimum, quibus idem spatium BC cum parte perpendiculi, sive majori, sive minori parte AB conficeretur. Sit sumpta major, ut in prima figura, vel minor, ut in secunda EB. Ostendendum est, tempus, quo conficiuntur spatia BE, BC, longius esse tempore, quo conficiuntur AB, BC. Intelligatur tempus per AB esse ut AB; erit quoque tempus motus in horizontali BC, cum BC dupla sit ad AB, et per ambo spatia ABC tempus erit dupla BA. Sit BO media inter EB, BA. Erit BO tempus casus per EB. Sit praeterea horizontale spatium BD duplum ipsius BE; constat, tempus ipsius post casum EB esse idem BO. Fiat, ut DB ad BC, seu ut EB ad BA, ita OB ad BN, et cum motus in horizontali sit aequabilis, sitque OB tempus per BD post casum ex E, erit NB tempus per BC post casum ex eadem altitudine E. Ex quo constat, OB cum AN esse tempus per EBC; cumque dupla BA sit tempus per ABC; ostendendum relinquitur, OB cum BN majora esse quam dupla BA. Cum autem OB media sit inter EB, BA; ratio EB ad BA dupla est rationis OB ad BA; et cum EB ad BA sit ut OB ad BN, erit quoque ratio OB ad BN dupla rationis OB ad BA; verum ipsa ratio OB ad BN componitur ex rationibus OB ad BA, et AB ad BN: ergo ratio AB ad BN est eadem cum ratione OB ad BA. Sunt igitur BO, BA, BN tres continue proportionales, et OB cum BN majores quam dupla BA. Ex quo patet propositum.

Theorema XIX, Propositio XXX.

Si ex aliquo puncto lineae horizontalis descendat perpendiculum, ex alio vero puncto in eadem horizontali sumpto ducendum sit planum usque ad perpendiculum, per quod mobile tempore brevissimo usque ad perpendiculum descendat; tale planum erit illud, quod de perpendiculo abscindit partem aequalem distantiae puncti accepti in horizontali a termino perpendiculi.

Sit perpendiculum BD (*Fig.* 90) ex puncto B horizontalis lineae AC descendens, in qua sit quodlibet punctum C, et in perpendiculo ponatur distantia BE aequalis distantiae BC, et ducatur CE. Dico, planorum omnium ex puncto C usque ad perpendiculum inclinatorum CE esse illud, super quo tempore omnium brevissimo fit descensus usque ad perpendiculum. Inclinentur enim supra et infra plana CF, CG, et ducatur IK circulum semidiametro BC descriptum tangens in C, quae erit perpendiculo aequidistans, et ipsi CF parallela sit EK, usque ad tangentem protracta, secans circumferentiam circuli in L; constat tempus casus per LE esse aequale tempori casus per CE, sed tempus per KE est longius quam per LE; ergo tempus per KE longius est quam per CE; sed tempus per KE aequatur tempori per CF, cum sint aequales, et secundum eandem inclinationem ductae: similiter cum CG et IE sint aequales, et juxta eandem inclinationem inclinatae, tempora lationum per ipsas erunt aequalia: sed tempus per HE breviorem ipsa IE est brevius tempore per IE; ergo tempus quoque per CE (quod aequatur tempori per HE), brevius erit tempore per IE. Patet ergo propositum.

Theorema XX, Propositio XXXI.

Si linea recta super horizontalem fuerit utcunque inclinata, planum a dato puncto in horizontali usque ad inclinatam extensum, in quo descensus fit tempore omnium brevissimo, est illud quod bifariam dividit angulum contentum a duabus perpendicularibus a dato puncto extensis, una ad horizontalem lineam, altera ad inclinatam.

Sit CD (*Fig.* 91) linea supra horizontalem AB utcunque inclinata, datoque in horizontali quocunque puncto A, educantur ex eo AC perpendicularis ad AB, AE vero perpendicularis ad CD, et angulum CAE bifariam dividat FA linea. Dico, planorum omnium ex quibuslibet punctis lineae CD ad punctum A inclinatorum extensum per FA esse illud, in quo tempore omnium brevissimo fiat descensus. Ducatur FG ipsi AE parallela, erunt anguli GFA, FAE coalterni aequales: est autem EAF ipsi FAG aequalis: ergo trianguli latera FG, GA

aequalia erunt. Si itaque centro G intervallo GA circulus describatur, transibit per F, et horizontalem et inclinatam tanget in punctis AF: est enim angulus GFC rectus, cum GF ipsi AE sit aequidistans: ex quo constat, lineas omnes usque ad inclinatam ex puncto A productas extra circumferentiam extendi, et quod consequens est, lationes per ipsas longiori tempore absolvi quam per FA. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Si duo circuli se se intus contingant, quorum interiorem quaelibet linea recta contingat, exteriorem vero secet, tres lineae a contactu circulorum ad tria puncta rectae lineae tangentis, nempe ad contactum interioris circuli, et ad sectiones exterioris protractae, angulos in contactu circulorum aequales continebunt.

Tangant se intus in puncto A (*Fig.* 92) duo circuli, quorum centra, B minoris, C majoris: interiorem vero circulum contingat recta quaelibet linea FG in puncto H, majorem autem secet in punctis F, G, et connectantur tres lineae AF, AH, AG. Dico, angulos ab illis contentos FAH, GAH esse aequales. Extendatur AH usque ad circumferentiam in I, et ex centris producantur BH, CI, èt per eadem centra ducta sit BC, quae extensa cadet in contactum A et in circumferentias circulorum in O et N. Et quia anguli ICN, HBO aequales sunt, cum quilibet ipsorum duplus sit anguli IAN, erunt lineae BH, CI parallelae. Cumque BH ex centro ad contactum sit perpendicularis ad FG, erit quoque ad eandem perpendicularis CI, et arcus FI arcui IG aequalis, et quod consequens est, angulus FAI angulo IAG. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XXI, PROPOSITIO XXXII.

Si in horizonte sumantur duo puncta, et ab altero ipsorum quaelibet linea versus alterum inclinetur, ex quo ad inclinatam recta linea ducatur, ex ea partem abscindens aequalem ei, quae inter puncta horizontis intercipitur, casus per hanc ductam citius absolvetur, quam per quascunque alias rectas ex eodem puncto ad eandem inclinatam protractas. In aliis autem, quae

per angulos aequales hinc inde ab hac distiterint, casus fiunt temporibus inter se aequalibus.

Sint in horizonte duo puncta A, B (*Fig.* 93), et ex B inclinetur recta BC, in qua ex termino B sumatur BD ipsi BA aequalis, et jungatur AD. Dico, casum per AD velocius fieri quam per quamlibet ex A ad inclinatam BC productam. Ex punctis enim A, D ad ipsas BA, BD perpendiculares ducantur AE, DE, se se in E secantes; et quia in triangulo aequicruri ABD anguli BAD, BDA sunt aequales, erunt reliqui ad rectos DAE, EDA aequales; ergo centro E intervallo EA descriptus circulus per D quoque transibit, et lineas BA, BD tanget in punctis A, D. Et cum A sit terminus perpendiculi AE, casus per AD citius absolvetur quam per quamcunque aliam ex eodem termino A usque ad lineam BC ultra circumferentiam circuli extensam; quod erat primo ostendendum.

Quod si extenso perpendiculo AE, in eo sumatur quodvis centrum F, et secundum intervallum FA circulus AGC describatur tangentem lineam in punctis G, C secans, junctae AG, AC per angulos aequales a media AD ex ante demonstratis dirimentur, et per ipsas lationes temporibus aequalibus absolventur, cum ex puncto sublimi A ad circumferentiam circuli AGC terminentur.

Problema XII, Propositio XXXIII.

Dato perpendiculo et plano ad ipsum inclinato, quorum eadem sit altitudo, idemque terminus sublimis, punctum in perpendiculo supra terminum communem reperire, ex quo si demittatur mobile, quod postea convertatur per planum inclinatum, ipsum planum conficiat tempore eodem, quo ipsum perpendiculum ex quiete conficeret.

Sint perpendiculum et planum inclinatum, quorum eadem sit altitudo AB, AC (*Fig.* 94), oportet in perpendiculo BA, producto ex parte A, punctum reperire, ex quo descendens mobile conficiat spatium AC eodem tempore, quo conficit datum perpendiculum AB ex quiete in A. Ponatur DCE ad angulos rectos ad AC, et secetur CD aequalis AB, et jungatur AD: erit angulus ADC major angulo CAD (est enim CA major

quam AB, seu CD); fiat angulus DAE aequalis angulo ADE, et ad ipsam AE perpendicularis sit EF plano inclinato, et utrinque extenso occurrens in F, et utraque AI, AG ponatur ipsi CF aequalis, et per G ducatur GH horizonti aequidistans. Dico, H esse punctum, quod quaeritur.

Intelligatur enim tempus casus per perpendiculum AB esse AB, erit tempus per AC ex quiete in A ipsamet AC. Cumque in triangulo rectangulo AEF ab angulo recto E perpendicularis ad basim AF sit acta EC, erit AE media inter FA, AC, et CE media inter AC, CF, hoc est inter CA, AI; et cum ipsius AC tempus ex A sit AC, erit AE tempus totius AF, et EC tempus ipsius AI. Quia vero in triangulo aequicruri AED latus AE est aequale lateri ED, erit ED tempus per AF, et est EC tempus per AI; ergo CD, hoc est AB, erit tempus per IF ex quiete in A, quod idem est ac si dicamus, AB esse tempus per AC ex G, seu ex H; quod erat faciendum.

Problema XIII, Propositio XXXIV.

Dato plano inclinato, et perpendiculo, quorum idem sit sublimis terminus, punctum sublimius in perpendiculo extenso reperire, ex quo mobile decidens, et per planum inclinatum conversum utcumque, conficiat tempore eodem ac solum planum inclinatum ex quiete in ejus superiori termino.

Sint planum inclinatum et perpendiculum AB, AC (*Fig.* 95), quorum idem sit terminus A. Oportet in perpendiculo ad partes A extenso punctum sublime reperire, ex quo mobile decidens, et per planum AB conversum, partem assumptam perpendiculi, et planum AB, conficiat tempore eodem ac solum planum AB ex quiete in A.

Sit horizontalis linea BC, et secetur AN aequalis AC: et ut AB ad BN, ita fiat AL ad LC: et ipsi AL ponatur aequalis AI, et ipsarum AC, BI tertia proportionalis sit CE in perpendiculo AC producto signata. Dico, CE esse spatium quaesitum: adeo ut extenso perpendiculo supra A, et assumpta parte AX ipsi CE aequali, mobile ex X conficiet utrumque spatium XAB aequali tempore ac solum AB ex A. Ponatur horizontalis XR aequidistans BC, cui occurrat BA extensa in

R, deinde producta AB in D, ducatur ED aequidistans CB, et supra AD semicirculus describatur, et ex B ipsi DA perpendicularis erigatur BF usque ad circumferentiam. Patet, FB esse mediam inter AB, BD, et ductam FA mediam inter DA, AB. Ponatur BS aequalis BI, et FH aequalis FB. Et quia, ut AB ad BD, ita AC ad CE, estque BF media inter AB, BD, et BI media inter AC, CE, erit ut BA ad AC, ita FB ad BS. Et cum sit ut BA ad AC, seu ad AN, ita FB ad BS, erit per conversionem rationis BF ad FS ut AB ad BN, hoc est, AL ad LC; rectangulum igitur sub FB, CL aequatur rectangulo sub AL, SF; hoc autem rectangulum AL, SF est excessus rectanguli sub AL, FB, seu AI, BF, super rectangulo AI, BS, seu AIB; rectangulum vero FB, LC est excessus rectanguli AC, BF super rectangulo AL, BF; rectangulum autem AC, BF aequatur rectangulo ABI (est enim ut BA ad AC, ita FB ad BI); excessus igitur rectanguli ABI super rectangulo AI, BF, seu AI, FH, aequatur excessui rectanguli AI, FH super rectangulo AIB; ergo bina rectangula AI, FH aequantur duobus ABI, AIB, nempe binis AIB, cum quadrato BI. Commune sumatur quadratum AI, erunt bina rectangula AIB, cum duobus quadratis AI, IB, nempe quadratum ipsum AB, aequale binis rectangulis AI, FH, cum quadrato AI. Communiter rursus assumpto quadrato BF, erunt duo quadrata AB, BF, nempe unicum quadratum AF, aequale binis rectangulis AI, FH, cum duobus quadratis AI, FB, id est AI, FH. Verum idem quadratum AF aequale est binis rectangulis AHF, cum duobus quadratis AH, HF; ergo bina rectangula AI, FH, cum quadratis AI, FH, aequalia sunt binis rectangulis AHF, cum quadratis AH, HF; et dempto communi quadrato HF, bina rectangula AI, FH, cum quadrato AI, erunt aequalia binis rectangulis AHF, cum quadrato AH. Cumque rectangulorum omnium FH sit latus commune, erit linea AH aequalis lineae AI, si enim major vel minor esset, rectangula quoque FHA, et quadratum HA, majora vel minora essent rectangulis FH, IA, et quadrato IA; contra id, quod demonstratum est.

Modo si intelligamus tempus casus per AB esse ut AB, tempus per AC erit ut AC, et ipsa IB, media inter AC, CE,

erit tempus per CE, seu per XA ex quiete in X; cumque inter DA, AB, seu RB, BA, media sit AF, inter vero AB, BD, id est RA, AB, media sit BF, cui aequatur FH, erit ex praedemonstratis excessus AH tempus per AB ex quiete in R, seu post casum ex X; dum tempus ejusdem AB ex quiete in A fuerit AB., Tempus igitur per XA est IB; per AB vero post RA, seu post XA, est AI; ergo tempus per XAB erit ut AB, idem nempe cum tempore per solam AB ex quiete in A. Quod erat propositum.

PROBLEMA XIV, PROPOSITIO XXXV.

Data inflexa ad datum perpendiculum, partem in inflexa accipere, in qua sola ex quiete fiat motus eodem tempore, atque in eadem cum perpendiculo.

Sit perpendiculum AB (*Fig.* 96); et ad ipsum inflexa BC. Oportet in BC partem accipere, in qua sola ex quiete fiat motus eodem tempore, ac in eadem cum perpendiculo AB. Ducatur horizon AD, cui inclinata CB extensa occurrat in E, ponaturque BF aequalis BA; et centro E intervallo EF circulus describatur FIG; et FE ad circumferentiam usque protrahatur in G; et ut GB ad BF, ita fiat BH ad HF; et HI circulum tangat in I. Deinde ex B perpendicularis ad FC erigatur BK, cui occurrat in L linea EIL; tandem ipsi EL perpendicularis ducatur LM occurrens BG in M. Dico, in linea BM ex quiete in B fieri motum eodem tempore, ac ex quiete in A per ambas AB, BM. Ponatur EN aequalis EL. Cumque ut GB ad BF, ita sit BH ad HF; erit permutando, ut GB ad BH, ita BF ad FH, et dividendo, GH ad HB, ut BH ad HF. Quare rectangulum GHF quadrato HB erit aequale: sed idem rectangulum aequatur quoque quadrato HI; ergo BH ipsi HI est aequalis. Cumque in quadrilatero ILBH latera HB, HI sint aequalia, et anguli B, I recti, erit latus quoque BL ipsi LI aequale: est autem EI aequalis EF; ergo tota LE, seu NE, duabus LB, EF est aequalis: auferatur communis EF; erit reliqua FN ipsi LB aequalis; at posita est FB aequalis ipsi BA; ergo LE duabus AB, BN aequatur. Rursus si intelligatur, tempus per AB esse ipsam AB; erit tempus per EB ipsi EB aequale: tempus

autem per totam EM erit EN, media scilicet inter ME, EB; quare reliquae BM tempus casus post EB, seu post AB, erit ipsa BN. Positum autem est, tempus per AB esse AB: ergo tempus casus per ambas ABM est ABN; cum autem tempus per EB ex quiete in E sit EB, tempus per BM ex quiete in B erit media proportionalis inter BE, BM; haec autem est BL: tempus igitur per ambas ABM ex quiete in A est ABN; tempus vero per BM solam ex quiete in B est BL: ostensum autem est, BL esse aequalem duabus AB, BN; ergo patet propositum.

Aliter magis expedite:

Sit BC planum inclinatum (*Fig.* 97), BA perpendiculum. Ducta perpendiculari per B ad EC, et utrinque extensa, ponatur BH aequalis excessus BE super BA: et angulo BHE ponatur aequalis angulus HEL: ipsa vero EL extensa occurrat BK in L; et ex L excitetur perpendicularis ad EL, LM occurrens BC in M. Dico, BM esse spatium in plano EC quaesitum. Quia enim angulus MLE rectus est, erit BL media inter MB, BE; et LE media inter ME, EB, cui EL secetur aequalis EN; et erunt tres lineae NE, EL, LH aequales, et HB erit excessus NE super BL. Verum eadem HB est etiam excessus NE super NB, BA; ergo duae NB, BA aequales sunt BL. Quod si ponatur EB esse tempus per EB; erit BL tempus per BM ex quiete in B; et BN erit tempus ejusdem post EB, seu post AB; et AB erit tempus per AB: ergo tempora per ABM, nempe ABN, aequalia sunt tempori per solam BM ex quiete in B; quod est intentum.

LEMMA.

Sit DC (*Fig.* 98) ad diametrum BA perpendicularis, et a termino B educatur BDE utcunque, et connectatur FB. Dico FB inter DB, BE esse mediam. Connectatur EF: et per B ducatur tangens BG, quae erit ipsi CD parallela: quare angulus DBG angulo FDB erit aequalis: at eidem GBD aequatur quoque angulus EFB in portione alterna; ergo similia sunt triangula FBD, FEB; et ut BD ad BF, ita FB ad BE.

LEMMA.

Sit linea AC (*Fig.* 99) major ipsa DF; et habeat AB ad BC majorem rationem, quam DE ad EF. Dico, AB ipsa DE esse majorem. Quia enim AB ad BC majorem rationem habet quam DE ad EF, quam rationem habet AB ad BC, hanc habebit DE ad minorem quam EF: habeat ad EG: et quia AB ad BC est ut DE ad EG, erit componendo, et per conversionem rationis, ut CA ad AB, ita GD ad DE: est autem CA major GD: ergo BA ipsa DE major erit.

LEMMA.

Sit circuli quadrans ACIB (*Fig.* 100), et ex B ipsi AC parallela BE; et ex quovis centro in ea sumpto circulus BOES descriptus tangens AB in B, et secans circumferentiam quadrantis in I; et juncta sit CB, et CI usque ad S extensa. Dico, lineam CI minorem semper esse ipsa CO. Jungatur AI, quae circulum BOE tanget. Si enim ducatur DI, erit aequalis ipsi DB; cum vero DB quadrantem tangat, tanget etiam eumdem DI: et ad diametrum AI erit perpendicularis. Quare et ipsa AI circulum BOE tanget in I. Et quia angulus AIC major est angulo ABC, cum majori insistat peripheriae: ergo angulus quoque SIN ipso ABC major erit; quare portio IES major est portione BO; et linea CS centro vicinior major ipsa CB: quare et CO major CI, cum SC ad CB sit ut OC ad CI.

Idem autem magis accidet si BIC (*Fig.* 101) quadrante fuerit minor: nam perpendicularis DB circulum secabit CIB; quare DI quoque, cum ipsi DB sit aequalis, et angulus DIA erit obtusus, et ideo AIN circulum quoque BIN secabit: cumque angulus ABC minor sit angulo AIC, qui aequatur ipsi SIN; iste autem est adhuc minor eo, qui ad contactum in I fieret per lineam SI; ergo portio SEI est longe major portione BO; unde CO major CI; quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXII, PROPOSITIO XXXVI.

Si in circulo ad horizontem erecto ab imo puncto elevetur planum non majorem subtendens circumferentiam quadrante, a

terminis cujus duo alia plana ad quodlibet circumferentiae punctum inflectantur, descensus in planis ambobus inflexis breviori tempore absolvetur, quam in solo priori plano elevato, vel quam in altero tantum ex illis duobus, nempe in inferiori.

Sit circuli ad horizontem erecti ab imo puncto C (*Fig.* 102) circumferentia CBD non major quadrante, in qua sit planum elevatum CD, et duo plana a terminis D, C inflexa ad quodlibet punctum B in circumferentia sumptum. Dico, tempus descensus per ambo plana DBC brevius esse tempore descensus per solum DC, vel per unicum BC ex quiete in B. Ducta sit per D horizontalis MDA, cui CB extensa occurrat in A: sintque DN, MC ad MD, et BN ad BD perpendiculares: et circa triangulum rectangulum DBN semicirculus describatur DFBN, secans DC in F; et ipsarum CD, DF media sit proportionalis DO; ipsarum autem CA, AB media sit AV. Sit autem PS tempus, quo peragitur tota DC, vel BC (constat enim tempore eodem peragi utramque), et quam rationem habet CD ad DO, hanc habeat tempus SP ad tempus PR: erit tempus PR id, in quo mobile ex D peragit DF; RS vero id, in quo reliquum FC. Cum vero PS sit quoque tempus, quo mobile ex B peragit BC; si fiat ut BC ad CD, ita SP ad PT, erit PT tempus casus ex A in C, cum DC media sit inter AC, CB, ex ante demonstratis. Fiat tantum, ut CA ad AV, ita TP ad PG; erit PG tempus, quo mobile ex A venit in B; GT vero tempus residuum motus BC consequentis post motum ex A in B. Cum vero DN circuli DFN diameter ad horizontem sit erecta, temporibus aequalibus peragentur DF et DB lineae. Quare si demonstratum fuerit, mobile citius permeare BC post casum DB, quam FC post peractam DF, habebimus intentum. At eadem temporis celeritate conficit mobile veniens ex D per DB ipsam BC, ac si venerit ex A per AB, cum ex utroque casu DB, AB aequalia accipiat velocitatis momenta; ergo demonstrandum erit, breviori tempore peragi BC post AB quam FC post DF. Explicatum est autem, tempus, quo peragitur BC post AB, esse GT: tempus vero ipsius FC post DF esse RS. Ostendendum itaque est, RS majus esse quam GT, quod sic ostenditur: quia ut SP ad PR, ita

CD ad DO, per conversionem rationis; et convertendo, ut RS ad SP, ita OC ad CD: ut autem SP ad PT, ita DC ad CA: et quia est ut TP ad PG, ita CA ad AV; per conversionem rationis erit quoque ut PT ad TG, ita AC ad CV; ergo ex aequali, ut RS ad GT, ita OC ad CV; est autem OC major quam CV, ut mox demonstrabitur; ergo tempus RS majus est tempore GT; quod demonstrare oportebat. Cum vero CF major sit CB, FD vero minor BA, habebit CD ad DF majorem rationem, quam CA ad AB; ut autem CD ad DF, ita quadratum CO ad quadratum OF, cum sint CD, DO, DF proportionales; ut vero CA ad AB, ita quadratum CV ad quadratum VB; ergo CO ad OF majorem rationem habet quam CV ad VB; igitur ex lemmate praedicto CO major est quam CV. Constat insuper, tempus per DC ad tempus per DBC esse ut DOC ad DO cum CV.

SCHOLIUM.

Ex his, quae demonstrata sunt, colligi posse videtur, lationem omnium velocissimam ex termino ad terminum, non per brevissimam lineam, nempe per rectam, sed per circuli portionem fieri. In quadrante enim BAEC (*Fig.* 103), cujus latus BC sit ad horizontem erectum, divisus sit arcus AC in quotcunque partes aequales, AD, DE, EF, FG, GC; et ductae sint rectae ex C ad puncta A, D, E, F, G; et junctae sint rectae quoque AD, DE, EF, FG, GC. Manifestum est, lationem per duas ADC citius absolvi quam per unam AC, vel DC ex quiete in D; sed ex quiete in A citius absolvitur DC quam duae ADC; sed per duas DEC ex quiete in A verisimile est citius absolvi descensum quam per solam CD; ergo descensus per tres ADEC absolvitur citius quam per duas ADC. Verum similiter procedente descensu per ADE, citius fit latio per duas EFC quam per solam EC; ergo per quatuor ADEFC citius fit motus quam per tres ADEC. Ac tandem per duas FGC post praecedentem descensum per ADEF citius absolvitur latio quam per solam FC; ergo per quinque ADEFGC breviori adhuc tempore fit descensus, quam per quatuor ADEFC. Quo igitur per inscriptos polygonos

magis ad circumferentiam accedimus, eo citius absolvitur motus inter duos terminos signatos AC.

Quod autem in quadrante explicatum est, contigit etiam in circumferentia quadrante minori; et idem est ratiocinium.

Problema XV, Propositio XXXVII.

Dato perpendiculo et plano inclinato, quorum eadem sit elevatio, partem in inclinato reperire, quae sit aequalis perpendiculo, et conficiatur eodem tempore ac ipsum perpendiculum.

Sint AB perpendiculum et AC (*Fig.* 104) planum inclinatum. Oportet in inclinato partem reperire aequalem perpendiculo AB, quae post quietem in A conficiatur tempore aequali tempori, quo conficitur perpendiculum. Ponatur AD aequalis AB; et reliqua DC bifariam secetur in I; et ut AC ad CI, ita fiat CI ad aliam AE; cui ponatur aequalis DG. Patet, EG aequalem esse AD, vel AB. Dico insuper, hanc EG eam esse, quae conficitur a mobili veniente ex quiete in A tempore aequali tempori, quo mobile cadit per AB Quia enim, ut AC ad CI, ita CI ad AE, seu ID ad DG; erit per conversionem rationis, ut CA ad AI, ita DI ad IG. Cum itaque sit ut totum CA ad totum AI, ita ablatum CI ad ablatum IG, erit reliquum IA ad reliquum AG ut totum CA ad totum AI. Est itaque AI media inter CA, AG; et CI media inter CA, AE. Si itaque ponatur, tempus per AB esse ut AB, erit AC tempus per AC; et CI, seu ID, tempus per AE; cumque AI media sit inter CA, AG; sitque CA tempus per totam AC; erit AI tempus per AG; et reliquum IC, sive DI, per reliquum GC: fuit autem DI tempus per AE; sunt itaque DI, IC, *quae inter se sunt aequales*, tempora per utrasque AE, CG; ergo reliquum DA erit tempus per EG, *quae ipsi AB aequatur*, aequale nempe tempori per AB. Quod faciendum fuit.

Corollarium.

Ex his constat, spatium quaesitum esse intermedium inter duas plani inclinati partes, superam et inferam, AE, GC, quae temporibus aequalibus conficiuntur, *nempe AE ex quiete in A, et GC post descensum AG.*

Problema XVI, Propositio XXXVIII.

Datis duobus planis horizontalibus a perpendiculo sectis, in perpendiculo punctum sublime reperire, ex quo cadentia mobilia, et in planis horizontalibus reflexa, conficiant in temporibus aequalibus temporibus casuum in iisdem horizontalibus, in superiore nempe, atque in inferiore, spatia, quae inter se habeant quamcumque datam rationem minoris ad majorem.

Secta sint plana horizontalia CD, BE (*Fig.* 105) a perpendiculo ACB, sitque data ratio minoris ad majorem N ad FG. Oportet in perpendiculo AB punctum sublime reperire, ex quo mobile cadens, et in plano CD reflexum tempore aequali tempori sui casus, spatium conficiat, quod ad spatium ab altero mobili ex eodem puncto sublimi veniente tempore aequali tempori sui casus, motu reflexo per BE planum, habeat rationem eandem cum data N ad FG. Ponatur GH aequalis ipsi N; et ut FH ad HG, ita fiat BC ad CL. Dico, L esse punctum sublime quaesitum. Accepta enim CM dupla ad CL, ducatur LM plano BE occurrens in O; erit BO dupla BL. Et quia, ut FH ad HG, ita BC ad CL; erit componendo et convertendo, ut HG, hoc est N, ad GF, ita CL ad LB, hoc est CM ad BO. Cum autem CM dupla sit ad LC, fit, spatium CM esse illud, quod a mobili veniente ex L post casum LC conficitur in plano CD tempore casus per LC; et eadem ratione BO esse illud, quod conficitur post casum LB in tempore aequali tempori casus per LB, cum BO sit dupla ad BL; ergo patet propositum.

Sagr. Parmi veramente che conceder si possa al nostro Accademico, che egli senza jattanza abbia nel principio di questo suo trattato potuto attribuirsi di arrecarci una nuova scienza intorno a un soggetto antichissimo. E il vedere con quanta felicità e chiarezza da un solo semplicissimo principio ei deduca le dimostrazioni di tante proposizioni, mi fa non poco maravigliare come tal materia sia passata intatta da Archimede, Apollonio, Euclide e tanti altri matematici e filo-

sofi illustri, e massime che del moto si trovano scritti volumi grandi e molti.

SALV. Si vede un poco di fragmento d' Euclide intorno al moto, ma non vi si scorge vestigio che egli s' incamminasse all' investigazione della proporzione dell' accelerazione e delle sue diversità sopra le diverse inclinazioni. Talchè veramente si può dire essersi non prima che ora aperta la porta ad una nuova contemplazione, piena di conclusioni infinite ed ammirande, le quali nei tempi avvenire potranno esercitare altri ingegni.

SAGR. Io veramente credo che sì come quelle poche passioni (dirò per esempio) del cerchio, dimostrate nel terzo dei suoi elementi da Euclide, sono l' ingresso ad innumerabili altre più recondite, così le prodotte e dimostrate in questo breve trattato, quando passasse nelle mani di altri ingegni speculativi, farebbe strada ad altre ed altre più maravigliose, ed è credibile che così seguirebbe mediante la nobiltà del soggetto sopra tutti gli altri naturali.

SIMP. Lunga ed assai laboriosa giornata è stata questa di oggi, nella quale ho gustato più delle semplici proposizioni che delle loro dimostrazioni, molte delle quali credo che per ben capirle mi porteranno via più d' un' ora per ciascheduna: studio che mi riserbo a farlo con quiete, lasciandomi V. S. il libro nelle mani, dopo che avremo veduto questa parte che resta intorno al moto dei projetti; che sarà, se così gli piace, nel seguente giorno.

SALV. Non mancherò d' esser con loro.



GIORNATA QUARTA,

NELLA QUALE SEGUITA IL DISCORSO

DEI MOVIMENTI LOCALI.



Salv. A tempo arriva ancora il Sig. Simplicio; però senza interpor quiete venghiamo al moto, ed ecco il testo del nostro Autore.

DE MOTU PROJECTORUM (1).

Quae in motu aequabili contingunt accidentia, itemque in motu naturaliter accelerato super quascunque planorum inclinationes, supra consideravimus. In hac, quam modo aggredior, contemplatione, praecipua quaedam symptomata, eaque scitu digna in medium afferre conabor, eademque firmis demonstrationibus stabilire, quae mobili accidunt dum motu ex duplici latione composito, aequali nempe et naturaliter accelerato, movetur: hujusmodi autem videtur esse motus ille, quem de projectis dicimus; cujus generationem talem constituo.

Mobile quoddam super planum horizontale projectum

(1) È questa la terza parte del trattato dei Movimenti Locali, del quale le prime due, quelle cioè del moto equabile e del moto naturalmente accelerato, sono state discorse nella precedente Giornata, il cui preambolo prometteva pur questa terza; la quale vien posta sotto la distinzione di quarta Giornata solo per non accrescer di soverchio la mole del precedente dialogo, del quale il presente è per conseguenza seguito e complemento. (L'Editore).

mente concipio omni secluso impedimento: jam constat ex his, quae fusius alibi dicta sunt, illius motum aequabilem et perpetuum super ipso plano futurum esse, si planum in infinitum extendatur: si vero terminatum, et in sublimi positum intelligamus, mobile, quod gravitate praeditum concipio, ad plani terminum delatum, ulterius progrediens, aequabili atque indelebili priori lationi superaddet illam, quam a propria gravitate habet deorsum propensionem, indeque motus quidam emerget compositus ex aequabili horizontali, et ex deorsum naturaliter accelerato, quem projectionem voco. Cujus accidentia nonnulla demonstrabimus; quorum primum sit.

THEOREMA I, PROPOSITIO I.

Projectum, dum fertur motu composito ex horizontali aequabili, et ex naturaliter accelerato deorsum, lineam semiparabolicam describit in sua latione.

SAGR. È forza, Sig. Salviati, in grazia di me ed anco, credo io, del Sig. Simplicio, far qui un poco di pausa; conciossiachè io non mi son tanto inoltrato nella geometria, che io abbia fatto studio in Apollonio, se non in quanto so ch' ei tratta di queste parabole e dell' altre sezioni coniche, senza la cognizione delle quali e delle lor passioni non credo che intender si possano le dimostrazioni di altre proposizioni a quelle aderenti. E perchè già nella bella prima proposizione ci vien proposto dall'Autore doversi dimostrare la linea descritta dal projetto esser parabolica, mi vo immaginando che, non dovendosi trattar di altro che di tali linee, sia assolutamente necessario avere una perfetta intelligenza, se non di tutte le passioni di tali figure dimostrate da Apollonio, almeno di quelle che per la presente scienza son necessarie.

SALV. V. S. si umilia molto, volendosi far nuovo di quelle cognizioni, le quali non è gran tempo, che furono ammesse come ben sapute: allora, dico, che nel trattato delle resistenze avemmo bisogno della notizia di certa proposizione di Apollonio, sopra la quale ella non mosse difficoltà.

SAGR. Può essere o che io la sapessi per ventura o che

io la supponessi per una volta tanto che ella mi bisognò in tutto quel trattato: ma qui dove m'immagino di avere a sentir tutte le dimostrazioni circa tali linee, non bisogna, come si dice, bever grosso, buttando via il tempo e la fatica.

Simp. E poi, rispetto a me, quando bene, come credo, il Sig. Sagredo fusse ben corredato di tutti i suoi bisogni, a me cominciano già a giugner come nuovi gli stessi primi termini: perchè sebbene i nostri filosofi hanno trattata questa materia del moto de' projetti, non mi sovvien che si siano ristretti a definire quali siano le linee da quelli descritte, salvo che assai generalmente sian sempre linee curve, eccetto che nelle projezioni perpendicolari sursum. Però quando quel poco di geometria che io ho appreso da Euclide, da quel tempo in qua che noi avemmo altri discorsi, non sia bastante per rendermi capace delle cognizioni necessarie per l'intelligenza delle seguenti dimostrazioni, mi converrà contentarmi delle sole proposizioni credute, ma non sapute.

Salv. Anzi voglio io che le sappiate mercè dell'istesso Autor dell'opera, il quale quando già mi concedè di veder questa sua fatica, perchè io ancora in quella volta non aveva in pronto i libri di Apollonio, s'ingegnò di dimostrarmi due passioni principalissime di essa parabola senza veruna altra precognizione, delle quali sole siamo bisognosi nel presente trattato; le quali son bene anco provate da Apollonio, ma dopo molte altre, che lungo sarebbe a vederle; ed io voglio che abbreviamo assai il viaggio, cavando la prima immediatamente dalla pura e semplice generazione di essa parabola, e da questa poi pure immediatamente la dimostrazione della seconda. Venendo dunque alla prima:

Intendasi il cono retto (*Fig.* 106) la cui base sia il cerchio IBKC, e vertice il punto L, nel quale, segato con un piano parallelo al lato LK, nasca la sezione BAC, detta parabola; la cui base BC seghi ad angoli retti il diametro IK del cerchio IBKC, e sia l'asse della parabola AD parallelo al lato LK; e preso qualsivoglia punto F nella linea BFA, tirisi la retta FE parallela alla BD. Dico che il quadrato della BD al quadrato della FE ha la medesima proporzione che

l'asse DA alla parte AE. Per lo punto E intendasi passare un piano parallelo al cerchio IBKC, il quale farà nel cono una sezione circolare, il cui diametro sia la linea GEH. E perchè sopra il diametro IK del cerchio IBK la BD è perpendicolare, sarà il quadrato della BD eguale al rettangolo fatto dalle parti ID, DK. E parimente nel cerchio superiore, che s' intende passare per i punti GFH, il quadrato della linea FE è eguale al rettangolo delle parti GEH. Adunque il quadrato della BD al quadrato della FE ha la medesima proporzione che il rettangolo IDK al rettangolo GEH. E perchè la linea ED è parallela alla HK, sarà la EH eguale alla DK, che pur son parallele: e però il rettangolo IDK al rettangolo GEH avrà la medesima proporzione che la ID alla GE, cioè che la DA alla AE: adunque il rettangolo IDK al rettangolo GEH, cioè il quadrato BD al quarato FE, ha la medesima proporzione che l'asse DA alla parte AE, che bisognava dimostrare.

L' altra proposizione, pur necessaria al presente trattato, così faremo manifesta. Segniamo la parabola (*Fig.* 107) della quale sia prolungato fuori l'asse CA in D, e preso qualsivoglia punto B, per esso intendasi prodotta la linea BC parallela alla base di essa parabola. E posta la DA eguale alla parte dell' asse CA, dico che la retta tirata per i punti D, B non cade dentro alla parabola, ma fuori, sì che solamente la tocca nell' istesso punto B. Imperocchè, se è possibile, caschi dentro segandola sopra, o prolungata segandola sotto. Ed in essa sia preso qualsivoglia punto G, per lo quale passi la retta FGE. E perchè il quadrato FE è maggiore del quadrato GE, maggior proporzione avrà esso quadrato FE al quadrato BC, che il quadrato GE al medesimo BC. E perchè, per la precedente, il quadrato FE al quadrato BC sta come la EA alla AC, adunque maggior proporzione ha la EA alla AC che il quadrato GE al quadrato BC, cioè che il quadrato ED al quadrato DC (essendochè nel triangolo DGE come la GE alla parallela BC, così sta ED a DC): ma la linea EA alla AC, cioè alla AD, ha la medesima proporzione che 4 rettangoli EAD a 4 quadrati di AD, cioè al quadrato CD (che è eguale a 4 quadrati di AD), adunque 4 rettangoli EAD al quadrato

CD avranno maggior proporzione che il quadrato ED al quadrato DC; adunque 4 rettangoli EAD saranno maggiori del quadrato ED: il che è falso, perchè son minori: imperocchè le parti EA, AD della linea ED non sono eguali. Adunque la linea DB tocca la parabola in B e non la sega; il che si doveva dimostrare.

Simp. Voi procedete nelle vostre dimostrazioni troppo alla grande; e andate sempre, per quanto mi pare, supponendo che tutte le proposizioni di Euclide mi siano così familiari e pronte, come gli stessi primi assiomi, il che non è. E pur ora l'uscirmi addosso, che 4 rettangoli EAD son minori del quadrato DE, perchè le parti EA, AD della linea ED non sono eguali, non mi quieta, ma mi lascia sospeso.

Salv. Veramente tutti i matematici non vulgari suppongono che il lettore abbia prontissimi almeno gli Elementi di Euclide: e qui per supplire al vostro bisogno basterà ricordarvi una proposizione del secondo, nella quale si dimostra, che quando una linea è segata in parti eguali, ed in diseguali, il rettangolo delle parti diseguali è minore del rettangolo delle parti eguali (cioè del quadrato della metà) quanto è il quadrato della linea compresa tra i segamenti. Onde è manifesto che il quadrato di tutta, il quale contiene 4 quadrati della metà, è maggiore di 4 rettangoli delle parti diseguali. Ora di queste due proposizioni dimostrate, prese dagli elementi conici, conviene che tenghiamo memoria per l'intelligenza delle cose seguenti nel presente trattato: che di queste sole, e non di più, si serve l'Autore. Ora possiamo ripigliare il testo per vedere in qual maniera ci vien dimostrando la sua prima proposizione, dove egli intende di provarci che la linea descritta dal mobile grave, mentre discende con moto composto dell'equabile orizzontale e del naturale descendente, sia una semiparabola.

Intelligatur (*Fig.* 108) horizontalis linea, seu planum AB in sublimi positum, super quo ex A in B motu aequabili feratur mobile: deficiente vero plani fulcimento in B, superveniat ipsi mobili a propria gravitate motus naturalis deorsum

juxta perpendicularem BN. Intelligatur insuper plano AB in directum posita linea BE, tanquam temporis effluxus, seu mensura, super qua ad libitum notentur partes quotlibet temporis aequales, BC, CD, DE; atque ex punctis B, C, D, E intelligantur productae lineae perpendiculo BN aequidistantes: in quarum prima accipiatur quaelibet pars CI; cujus quadrupla sumatur in sequenti DF, nonupla in EH, et consequenter in reliquis secundum rationem quadratorum ipsarum, CB, DB, EB, seu dicamus, in ratione earundem linearum duplicata. Quod si mobili ultra B versus C aequabili latione lato descensum perpendicularem secundum quantitatem CI superadditum intelligamus, reperietur tempore BC in termino I constitutum. Ulterius autem procedendo, tempore DB, duplo scilicet BC, spatium descensus deorsum erit spatii primi CI quadruplum: demonstratum enim est in primo tractatu, spatia peracta a gravi motu naturaliter accelerato esse in duplicata ratione temporum. Pariterque consequenter spatium EH peractum tempore BE erit ut 9, adeo ut manifeste constet, spatia EH, DF, CI esse inter se ut quadrata linearum EB, DB, CB. Ducantur modo a punctis I, F, H rectae IO, FG, HL, ipsi EB aequidistantes; erunt HL, FG, IO lineae lineis EB, DB, CB, singulae singulis aequales; nec non ipsae BO, BG, BL ipsis CI, DF, EH aequales. Eritque quadratum HL ad quadratum FG ut linea LB ad BG, et quadratum FG ad quadratum IO ut GB ad BO. Ergo puncta I, F, H sunt in una eademque linea parabolica. Similiterque demonstrabitur, assumptis quibuscumque temporis particulis aequalibus cujuslibet magnitudinis, loca mobilis simili motu composito lati iisdem temporibus in eadem linea parabolica reperiri. Ergo patet propositum.

Salv. Questa conclusione si raccoglie dal converso della prima delle due proposizioni poste di sopra: imperocchè descritta per esempio la parabola per li punti B, H, se alcuno delli due F, I non fusse nella descritta linea parabolica, sarebbe dentro o fuori; e per conseguenza la linea FG sarebbe o minore o maggiore di quella che andasse a terminare nella linea parabolica: onde il quadrato della HL non al quadrato

della FG, ma ad altro maggiore o minore avrebbe la medesima proporzione che ha la linea LB alla BG; ma la ha al quadrato della FG, adunque il punto F è nella parabolica; e così tutti gli altri, ec.

Sagr. Non si può negare che il discorso non sia nuovo, ingegnoso e concludente, argomentando *ex suppositione*, supponendo cioè che il moto trasversale si mantenga sempre equabile, e che il naturale *deorsum* parimente mantenga il suo tenore di andarsi sempre accelerando secondo la proporzion dei tempi, e che tali moti, e loro velocità nel mescolarsi non si alterino, perturbino ed impediscano, sì che finalmente la linea del projetto non vada nella continuazion del moto a degenerare in un'altra specie; cosa che mi si rappresenta come impossibile. Imperocchè, stante che l'asse della parabola nostra, secondo il quale noi supponghiamo farsi il moto naturale dei gravi, essendo perpendicolare all'orizzonte, va a terminar nel centro della terra; ed essendo che la linea parabolica si va sempre slargando dal suo asse, niun projetto andrebbe giammai a terminar nel centro, o se vi andrebbe, come par necessario, la linea del projetto traligneerebbe in altra diversissima dalla parabolica.

Simp. Io a queste difficoltà ne aggiungo dell'altre: una delle quali è, che noi supponghiamo che il piano orizzontale, il quale non sia nè acclive nè declive, sia una linea retta: quasi che una simil linea sia in tutte le sue parti egualmente distante dal centro, il che non è vero; perchè partendosi dal suo mezzo va verso le estremità sempre più e più allontanandosi dal centro, e però ascendendo sempre; il che si tira in conseguenza esser impossibile che il moto si perpetui, anzi che nè pur per qualche spazio si mantenga equabile, ma ben sempre vada languendo. In oltre è per mio credere impossibile lo schivar l'impedimento del mezzo, sì che non levi l'equabilità del moto trasversale e la regola dell'accelerazione nei gravi cadenti. Dalle quali tutte difficoltà si rende molto improbabile che le cose dimostrate con tali supposizioni costanti possano poi nelle praticate esperienze verificarsi.

Salv. Tutte le promosse difficoltà e instanze son tanto

ben fondate, che stimo essere impossibile il rimuoverle; ed io per me le ammetto tutte, come anco credo che il nostro Autore esso ancora le ammetterebbe. E concedo che le conclusioni così in astratto dimostrate si alterino in concreto, e si falsifichino a segno tale, che nè il moto trasversale sia equabile, nè l'accelerazione del naturale sia con la proporzione supposta, nè la linea del projetto sia parabolica, ec. Ma bene all'incontro domando che elle non contendano al nostro Autor medesimo quello che altri grandissimi uomini hanno supposto, ancorchè falso. E la sola autorità di Archimede può quietare ognuno, il quale nelle sue Meccaniche, e nella prima quadratura della parabola, piglia come principio vero, l'ago della bilancia o stadera essere una linea retta in ogni suo punto egualmente distante dal centro comune dei gravi; e le corde alle quali sono appesi i gravi esser tra di loro parallele. La qual licenza viene da alcuni scusata perchè nelle nostre pratiche gli strumenti nostri, e le distanze, le quali vengono da noi adoperate, son così piccole in comparazione della nostra gran lontananza dal centro del globo terrestre, che ben possiamo prendere un minuto di un grado del cerchio massimo come se fusse una linea retta, e due perpendicoli, che dai suoi estremi pendessero, come se fussero parelleli. Che quando nelle opere pratiche si avesse a tener conto di simili minuzie, bisognerebbe cominciare a riprendere gli architetti, li quali col perpendicolo suppongono di alzare le altissime torri tra linee equidistanti. Aggiungo qui che noi possiamo dire, che Archimede e gli altri supposero nelle loro contemplazioni esser costituiti per infinita lontananza remoti dal centro; nel qual caso i loro assunti non erano falsi; e che però concludevano con assoluta dimostrazione. Quando poi noi vogliamo praticare in distanza terminata le conclusioni dimostrate col suppor lontananza immensa, dobbiamo difalcar dal vero dimostrato quello che importa il non esser stata la lontananza dal centro realmente infinita, ma ben tale che domandar si può immensa in comparazione della piccolezza degli artificj praticati da noi, il maggior dei quali sarà il tiro dei projetti, e di questi quello solamente delle artiglie-

rie il quale, per grande che sia, non passerà 4 miglia di quelle, delle quali noi siamo lontani dal centro quasi altrettante migliaja; ed andando questi a terminar nella superficie del globo terrestre, ben potranno solo insensibilmente alterar quella figura parabolica, la quale si concede che sommamente si trasformerebbe nell'andare a terminar nel centro. Quanto poi al perturbamento procedente dall'impedimento del mezzo, questo è più considerabile, e per la sua tanto moltiplice varietà incapace di poter sotto regole ferme esser compreso, e datone scienza; attesochè se noi metteremo in considerazione il solo impedimento che arreca l'aria ai moti considerati da noi, questo si troverà perturbarli tutti, e perturbarli in modi infiniti, secondo che in infiniti modi si variano le figure, le gravità e le velocità dei mobili. Imperocchè quanto alla velocità, secondo che questa sarà maggiore, maggiore sarà il contrasto fattogli dall'aria, la quale anco impedirà più i mobili, secondo che saranno men gravi: talchè sebbene il grave descendente dovrebbe andare accelerandosi in duplicata proporzione della durazion del suo moto, tuttavia per gravissimo che fusse il mobile nel venir da grandissime altezze, sarà tale l'impedimento dell'aria, che gli torrà il poter crescere più la sua velocità, e lo ridurrà ad un moto uniforme ed equabile: e questa adequazione tanto più presto ed in minori altezze si otterrà, quanto il mobile sarà men grave. Quel moto anco, che nel piano orizzontale, rimossi tutti gli altri ostacoli, dovrebbe essere equabile e perpetuo, verrà dall'impedimento dell'aria alterato, e finalmente fermato: e qui ancora tanto più presto, quanto il mobile sarà più leggero. Dei quali accidenti di gravità, di velocità, ed anco di figura, come variabili in modi infiniti, non si può dar ferma scienza. E però per poter scientificamente trattar cotal materia, bisogna astrar da essi, e ritrovate e dimostrate le conclusioni astratte dagli impedimenti, servircene nel praticarle con quelle limitazioni, che l'esperienza ci verrà insegnando. E non però piccolo sarà l'utile, perchè le materie e lor figure saranno elette le men soggette agl'impedimenti del mezzo, quali sono le gravissime e le rotonde: e gli spazj e le velocità per lo più saran-

no sì grandi, che le loro esorbitanze non possano con facil tara esser ridotte a segno. Anzi pure nei projetti praticabili da noi, che siano di materie gravi e di figura rotonda, ed anco di materie men gravi e di figura cilindrica, come frecce, lanciati con frombe o archi, insensibile sarà del tutto lo svario del loro moto dall' esatta figura parabolica. Anzi (e voglio pigliarmi alquanto più di licenza), che negli artifizj da noi praticabili la piccolezza loro renda pochissimo notabili gli esterni ed accidentari impedimenti, tra i quali quello del mezzo è il più considerabile, vi posso io con due esperienze far manifesto. Io farò considerazione sopra i movimenti fatti per l'aria, che tali son principalmente quelli dei quali noi parliamo, contro i quali essa aria in due maniere esercita la sua forza. L' una è con l' impedir più i mobili men gravi che i gravissimi; l' altra è nel contrastar più alla velocità maggiore che alla minore dell' istesso mobile. Quanto al primo: il mostrarci l' esperienza, che due palle di grandezza eguali, ma di peso l' una 10 o 12 volte più grave dell' altra, quali sarebbero, per esempio, una di piombo e l' altra di rovere, scendendo dall' altezza di 150 e 200 braccia con pochissima differente velocità arrivano in terra, ci rende sicuri che l' impedimento e ritardamento dell' aria in amendue è poco; che se la palla di piombo, partendosi nell' istesso momento da alto con l' altra di legno, poco fusse ritardata, e questa molto, per assai notabile spazio dovrebbe il piombo nell' arrivare in terra lasciarsi addietro il legno, mentre è 10 volte più grave; il che tuttavia non accade, anzi la sua anticipazione non sarà nè anco la centesima parte di tutta l' altezza. E tra una palla di piombo, ed una di pietra, che di quella pesasse la terza parte o la metà, appena sarebbe osservabile la differenza del tempo delle lor giunte in terra. Ora perchè l' impeto che acquista una palla di piombo nel cadere da un'altezza di 200 braccia (il quale è tanto, che continuandolo in moto equabile scorrerebbe braccia 400 in tanto tempo quanto fu quello della sua scesa) è assai considerabile rispetto alle velocità, che noi con archi o altre macchine conferiamo ai nostri projetti (trattone gl' impeti dependenti dal fuoco), pos-

siamo senza errore notabile concludere e reputar come assolutamente vere le proposizioni, che si dimostreranno senza il riguardo dell'alterazion del mezzo. Circa poi all'altra parte, che è di mostrare, l'impedimento che l'istesso mobile riceve dall'aria, mentre egli con gran velocità si muove, non esser grandemente maggiore di quello che gli contrasta nel muoversi lentamente, ferma certezza ce ne porge la seguente esperienza. Sospendansi da due fili egualmente lunghi, e di lunghezza di 4 o 5 braccia, due palle di piombo eguali; e attaccati i detti fili in alto si rimuovano amendue le palle dallo stato perpendicolare; ma l'una si allontani per 80, o più gradi, e l'altra non più che 4 o 5; sì che lasciate in libertà, l'una scenda, e trapassando il perpendicolo descriva archi grandissimi di 160, 150, 140 gradi ec., diminuendoli a poco a poco: ma l'altra, scorrendo liberamente, passi archi piccoli di 10, 8, 6 ec., diminuendoli essa ancora a poco a poco. Qui primieramente dico, che in tanto tempo passerà la prima li suoi gradi 180, 160 ec. in quanto l'altra li suoi 10, 8 ec. Dal che si fa manifesto che la velocità della prima palla sarà 16 e 18 volte maggiore della velocità della seconda; sì che quando la velocità maggiore più dovesse essere impedita dall'aria che la minore, più rade dovriano esser le vibrazioni negli archi grandissimi di 180 o 160 gradi ec., che nei piccolissimi di 10, 8, 4, ed anco di 2 e di 1; ma a questo repugna l'esperienza: imperocchè se due compagni si metteranno a numerare le vibrazioni, l'uno le grandissime e l'altro le piccolissime, vedranno che ne numereranno non pur le diecine, ma le centinaja ancora, senza discordar di una sola, anzi di un sol punto. E questa osservazione ci assicura congiuntamente delle due proposizioni, cioè che le massime e le minime vibrazioni si fanno tutte a una a una sotto tempi eguali, e che l'impedimento e ritardamento dell'aria non opera più nei moti velocissimi che nei tardissimi; contro a quello che pur dianzi pareva che noi ancora comunemente giudicassimo.

SAGR. Anzi, perchè non si può negare che l'aria impedisca questi e quelli, poichè e questi e quelli vanno languen-

do e finalmente finiscono, convien dire che tali ritardamenti si facciano con la medesima proporzione nell'una e nell'altra operazione. Ma che? L'avere a far maggior resistenza una volta che un' altra, da che altro procede egli fuor che dall'essere assalito una volta con impeto e velocità maggiore, ed un'altra con minore? E se questo è, la quantità medesima della velocità del mobile è cagione ed insieme misura della quantità della resistenza. Adunque tutti i moti, siano tardi o veloci, son ritardati o impediti con l'istessa proporzione; notizia pare a me non disprezzabile.

Salv. Possiamo pertanto anco in questo secondo caso concludere che le fallacie nelle conclusioni, le quali astraendo dagli accidenti esterni si dimostreranno, sieno negli artifizj nostri di piccola considerazione rispetto ai moti di gran velocità, dei quali per lo più si tratta, ed alle distanze che non sono se non piccolissime in relazione alla grandezza del semidiametro e dei cerchi massimi del globo terrestre.

Simp. Io volentieri sentirei la cagione per la quale V. S. sequestra i projetti dall' impeto del fuoco, cioè, come credo, dalla forza della polvere, dagli altri projetti con frombe, archi o balestre, circa il non essere nell' istesso modo soggetti all' alterazione ed impedimento dell' aria.

Salv. Muovemi l' eccessiva, e, per modo di dire, soprannatural furia con la quale tali projetti vengono cacciati; che bene anco fuora d' iperbole mi pare che la velocità con la quale vien cacciata la palla fuori di un moschetto, o di una artiglieria, si possa chiamar soprannaturale. Imperocchè scendendo naturalmente per l'aria da qualche altezza immensa una tal palla, la velocità sua, mercè del contrasto dell'aria, non si andrà accrescendo perpetuamente: ma quello che nei cadenti poco gravi si vede in non molto spazio accadere, dico di ridursi finalmente a un moto equabile, accaderà ancora dopo la scesa di qualche migliaja di braccia in una palla di ferro o di piombo, e questa terminata ed ultima velocità si può dire esser la massima che naturalmente può ottener tal grave per aria; la qual velocità io reputo assai minor di quella che alla medesima palla viene impressa dalla

polvere accesa. Del che una assai acconcia esperienza ci può render cauti. Sparisi da un' altezza di cento o più braccia un archibuso con palla di piombo all' ingiù perpendicolarmente sopra un pavimento di pietra; e col medesimo si tiri contro una simil pietra in distanza di un braccio o due, e vedasi poi qual delle due palle si trovi esser più ammaccata: imperocchè se la venuta da alto si troverà meno schiacciata dell' altra, sarà segno che l'aria gli avrà impedita e diminuita la velocità conferitagli dal fuoco nel principio del moto; e che per conseguenza una tanta velocità non gli permetterebbe l' aria che ella guadagnasse giammai venendo da quanto si voglia sublime altezza: che quando la velocità impressagli dal fuoco non eccedesse quella che per sè stessa naturalmente scendendo potesse acquistare, la botta all' ingiù dovrebbe più tosto esser più valida che meno. Io non ho fatto tale esperienza, ma inclino a credere che una palla di archibuso o di artiglieria, cadendo da un'altezza quanto si voglia grande, non farà quella percossa che ella fa sparata in una muraglia in lontananza di poche braccia, cioè di così poche, che il breve sdrucito o vogliam dire scissura da farsi nell' aria non basti a levar l'eccesso della furia soprannaturale impressagli dal fuoco. Questo soverchio impeto di simili tiri sforzati può cagionar qualche deformità nella linea del projetto, facendo il principio della parabola meno inclinato e curvo del fine; ma questo poco o niente può esser di pregiudizio al nostro Autore nelle praticabili operazioni: tra le quali principale è la composizione di una tavola per i tiri che dicono di volata, la quale contenga le lontananze delle cadute delle palle tirate secondo tutte le diverse elevazioni. E perchè tali projezioni si fanno con mortari, e con non molta carica, in questi non essendo soprannaturale l' impeto, i tiri segnano le loro linee assai esattamente.

Ma intanto procediamo avanti nel trattato, dove l'Autore ci vuole introdurre alla contemplazione e investigazione dell' impeto del mobile, mentre si muove con moto composto di due. E prima, del composto di due equabili, l'uno orizzontale e l'altro perpendicolare.

THEOREMA II, PROPOSITIO II.

Si aliquod mobile duplici motu aequabili moveatur, nempe orizontali et perpendiculari, impetus, seu momentum lationis ex utroque motu compositae, erit potentia aequalis ambobus momentis priorum motuum.

Moveatur enim aliquod mobile aequabiliter duplici latione: et motioni perpendiculari respondeat spatium AB (*Fig.* 109); lationi vero horizontali eodem tempore confectae respondeat BC. Cum igitur per motus aequabiles conficiantur eodem tempore spatia AB, BC, erunt harum lationum momenta inter se ut ipsae AB, BC. Mobile vero, quod secundum hasce duas motiones movetur, describit diagonalem AC: erit momentum suae velocitatis ut AC. Verum AC potentia aequatur ipsis AB, BC, ergo momentum compositum ex utrisque momentis AB, BC est potentia tantum illis simul sumptis aequale; quod erat ostendendum.

SIMP. È necessario levarmi un poco di scrupolo che qui mi nasce, parendomi che questo, che ora si conclude, repugni ad un'altra proposizione del trattato passato; nella quale si affermava, l'impeto del mobile veniente dall'A in B essere eguale al veniente dall'A in C, ed ora si conclude l'impeto in C essere maggiore che in B.

SALV. Le proposizioni, Sig. Simplicio, sono amendue vere, ma molto diverse tra di loro. Qui si parla di un sol mobile mosso di un sol moto, ma composto di due, amendue equabili; e là si parla di due mobili mossi di moti naturalmente accelerati, uno per la perpendicolare AB, e l'altro per l'inclinata AC. In oltre, i tempi quivi non si suppongono eguali, ma il tempo per l'inclinata AC è maggiore del tempo per la perpendicolare AB; ma nel moto, del quale si parla al presente, i moti per le AB, BC, AC s'intendono equabili e fatti nell'istesso tempo.

SIMP. Mi scusino, e seguano avanti, che resto acquietato.

SALV. Seguita l'Autore per incamminarci a intender quel che accaggia intorno all'impeto di un mobile mosso pur di

un moto composto di due, uno cioè orizzontale ed equabile, e l'altro perpendicolare, ma naturalmente accelerato, dei quali finalmente è composto il moto del projetto e si descrive la linea parabolica; in ciaschedun punto della quale si cerca di determinare quanto sia l'impeto del projetto: per la cui intelligenza ci dimostra l'Autore il modo, o vogliamo dir metodo, di regolare e misurar cotale impeto sopra l'istessa linea, nella quale si fa il moto del grave descendente con moto naturalmente accelerato partendosi dalla quiete, dicendo:

THEOREMA III, PROPOSITIO III.

Fiat motus per lineam AB ex quiete in A (*Fig.* 110), et accipiatur in ea quodlibet punctum C; et ponatur ipsamet AC esse tempus, seu temporis mensura, casus ipsius per spatium AC, nec non mensura quoque impetus, seu momenti in puncto C ex descensu AC acquisiti. Modo sumatur in eadem linea AB quodcunque aliud punctum, ut puta B, in quo determinandum est de impetu acquisito a mobili per descensum AB, in ratione ad impetum, quem obtinuit in C, cujus mensura posita est AC. Ponatur AS, media proportionalis inter BA, AC. Demonstrabimus, impetum in B ad impetum in C esse ut linea SA ad AC. Sumantur horizontales CD dupla ipsius AC, BE vero dupla BA. Constat ex demonstratis, cadens per AC conversum in horizonte CD, atque juxta impetum in C aequisitum motu aequabili delatum, conficere spatium CD aequali tempore, atque ipsum AC motu accelerato confecit; similiterque BE confici eodem tempore atque AB. Sed tempus ipsius descensus AB est AS; ergo horizontalis BE conficitur tempore AS. Fiat ut tempus SA ad tempus AC, ita EB ad BL. Cumque motus per BE sit aequabilis, erit spatium BL peractum tempore AC secundum momentum celeritatis in B. Sed tempore eodem AC conficitur spatium CD secundum momentum celeritatis in C: momenta autem celeritatis sunt inter se ut spatia, quae juxta ipsa momenta eodem conficiuntur tempore: ergo momentum celeritatis in C ad momentum celeritatis in B, est ut DC ad BL. Quia vero ut DC ad BE,

ita ipsarum dimidia, nempe CA ad AB; ut autem EB ad BL, ita BA ad AS: ergo ex aequali, ut CD ad BL, ita CA ad AS, hoc est, ut momentum celeritatis in C ad momentum celeritatis in B, ita CA ad AS; hoc est, tempus per CA ad tempus per AB. Patet itaque ratio mensurandi impetum, seu celeritatis momentum super linea, in qua fit motus descensus; qui quidem impetus ponitur augeri pro ratione temporis.

Hic autem, antequam ulterius progrediamur, praemonendum est, quod cum de motu composito ex aequabili horizontali, et ex naturaliter accelerato deorsum futurus sit sermo (ex tali enim mixtione conflatur, ac designatur linea projecti, nempe parabola), necesse habemus definire aliquam communem mensurum, juxta quam utriusque motus velocitatem, impetum, seu momentum dimetiri valeamus. Cumque lationis aequabilis innumeri sint velocitatis gradus, quorum non quilibet fortuito, sed unus ex illis innumeris cum gradu celeritatis per motum naturaliter acceleratum acquisito sit conferendus et conjungendus; nullam faciliorem viam excogitare potui pro eo eligendo, atque determinando, quam alium ejusdem generis assumendo. Ut autem clarius me explicem; intelligatur perpendicularis AC (*Fig.* 111) ad horizontalem CB: AC vero esse altitudinem, CB autem amplitudinem semiparabolae AB, quae describitur a compositione duarum lationum; quarum una est mobilis descendentis per AC motu naturaliter accelerato ex quiete in A; altera est motus transversalis aequabilis juxta horizontalem AD. Impetus acquisitus in C per descensum AC determinatur a quantitate ejusdem altitudinis AC, unus enim atque idem est semper impetus mobilis ex eadem altitudine cadentis: verum in horizontali non unus, sed innumeri assignari possunt gradus velocitatis motuum aequabilium; ex quorum multitudine, ut illum quem elegero a reliquis segregare, et quasi digito monstrare possim, altitudinem CA in sublimi extendam, in qua, prout opus fuerit, sublimitatem AE firmabo, ex qua si cadens ex quiete in E mente concipiam, patet, impetum ejus in termino A acquisitum unum esse, cum quo idem mobile, per horizontalem AD conversum, ferri concepero; ejusque gradum celeri-

tatis esse illum, quo in tempore descensus per EA spatium in horizontali duplum ipsius EA conficiet. Haec praemonere necessarium visum est.

Advertatur insuper, semiparabolae AB amplitudinem a me vocari horizontalem CB;

Altitudinem, AC nempe, ejusdem parabolae axem.

Lineam vero EA, ex cujus descensu determinatur impetus horizontalis, sublimitatem appello.

His declaratis, ac definitis, ad demonstrandum me confero.

Sagr. Fermate in grazia, perchè qui mi par che convenga adornar questo pensiero dell'Autore con la conformità del concetto di Platone intorno al determinare le diverse velocità dei moti equabili delle conversioni dei moti celesti; il quale avendo per avventura avuto concetto, non potere alcun mobile passare dalla quiete ad alcun determinato grado di velocità, nel quale ei debba poi equabilmente perpetuarsi, se non col passare per tutti gli altri gradi di velocità minori, o vogliam dire di tardità maggiori, che tra l'assegnato grado e l'altissimo di tardità, cioè della quiete, intercedono, disse, che Iddio, dopo aver creati i corpi mobili celesti, per assegnar loro quelle velocità, con le quali poi dovessero con moto circolare equabile perpetuamente muoversi, li fece, partendosi loro dalla quiete, muover per determinati spazj di quel moto naturale e per linea retta, secondo il quale noi sensatamente vediamo i nostri mobili muoversi dallo stato di quiete accelerandosi successivamente. E soggiugne che avendoli fatto guadagnar quel grado, nel quale gli piacque che poi dovessero mantenersi perpetuamente, convertì il moto loro retto in circolare; il quale solo è atto a conservarsi equabile, rigirandosi sempre senza allontanarsi o avvicinarsi a qualche prefisso termine da essi desiderato. Il concetto è veramente degno di Platone; ed è tanto più da stimarsi, quanto i fondamenti taciuti da quello e scoperti dal nostro Autore, col levargli la maschera o sembianza poetica, lo scuoprono in aspetto di verace istoria. E mi pare assai credibile che

avendo noi per le dottrine astronomiche assai competente notizia delle grandezze degli orbi e dei pianeti, e delle distanze loro dal centro intorno al quale si raggirano, come ancora delle loro velocità, possa il nostro Autore (al quale il concetto Platonico non era ascosto) aver talvolta per sua curiosità avuto pensiero di andare investigando se si potesse assegnare una determinata sublimità, dalla quale partendosi, come da stato di quiete, i corpi dei pianeti, e mossisi per certi spazj di moto retto e naturalmente accelerato, convertendo poi la velocità acquistata in moti equabili, si trovassero corrispondere alle grandezze degli orbi loro e ai tempi delle loro revoluzioni.

SALV. Mi par sovvenire che egli già mi dicesse aver una volta fatto il computo, ed anco trovatolo assai acconciamente rispondere alle osservazioni; ma non averne voluto parlare, giudicando che le troppe novità da lui scoperte, che lo sdegno di molti gli hanno provocato, non accendessero nuove scintille. Ma se alcuno averà simil desiderio, potrà per sè stesso con la dottrina del presente trattato soddisfare al suo gusto. Ma seguitiamo la nostra materia; che è di dimostrare:

PROBLEMA I, PROPOSITIO IV.

Quomodo in datae parabolae a projecto descriptae punctis singulis impetus sit determinandus.

Sit semiparabola BEC (*Fig.* 112), cujus amplitudo CD, altitudo DB, quae extensa in sublimi occurrat tangenti parabolam CA in A, et per verticem B sit horizonti et CD parallela BI. Quod si amplitudo CD sit aequalis toti altitudini DA, erit BI aequalis BA et BD. Et si temporis casus per AB, et momenti velocitatis acquisiti in B per descensum AB ex quiete in A, ponamus mensuram esse ipsammet AB; erit DC (dupla nempe BI) spatium, quod per impetum AB, per horizontalem conversum, conficiet eodem tempore. Sed eodem tempore cadens per BD ex quiete in B conficit altitudinem BD, ergo mobile cadens ex quiete in A, per AB conversum cum impetu AB, per horizontalem conficit spatium aequale DC.

Superveniente vero casu per BD, conficit altitudinem BD; et parabola BC designatur, cujus impetus in termino C est compositus ex aequabili transversali, cujus momentum est ut AB, et ex altero momento acquisito in descensu BD in termino D seu C; quae momenta aequalia sunt. Si ergo intelligamus, BA alterius illorum esse mensuram, ut puta transversalis aequabilis: BI vero, quae ipsi BD est aequalis, esse mensuram impetus acquisiti in D seu C: subtensa IA erit quantitas momenti compositi ex ambobus: erit ergo quantitas, seu mensura integri momenti, quo projectum veniens per parabolam BC impetum facit in C. His retentis, accipiatur in parabola quodlibet punctum E, in quo de impetu projecti determinandum sit. Ducatur horizontalis EF, et accipiatur BG media proportionalis inter BD, BF. Cumque posita sit AB seu BD esse mensura temporis et momenti velocitatis in casu BD ex quiete in B; erit BG tempus, seu mensura temporis et impetus in F, venientis ex B. Si igitur ponatur BO aequalis BG, juncta diagonalis AO erit quantitas impetus in puncto E; est enim AB determinatrix posita temporis et impetus in B, qui conversus in horizontali, semper servatur idem: BO vero determinat impetum in F seu E per descensum ex quiete in B, in altitudine BF, his autem AB, BO potentia aequipollet AO. Patet ergo quod quaerebatur.

Sagr. La contemplazione del componimento di questi impeti diversi, e della quantità di quell'impeto che da tal mistione ne risulta, mi giugne tanto nuova che mi lascia la mente in non piccola confusione. Non dico della mistione di due movimenti equabili, benchè tra di loro diseguali, fatti uno per la linea orizzontale e l'altro per la perpendicolare, che di questi resto capacissimo farsi un moto in potenza eguale ad amendue i componenti, ma mi nasce confusione nel mescolamento dell'orizzontale equabile, e perpendicolare naturalmente accelerato. Però vorrei che insieme digerissimo meglio questa materia.

Simp. Ed io tanto più ne son bisognoso, quanto che non sono ancor totalmente quietato di mente, come bisogna nelle

proposizioni che sono come primi fondamenti dell' altre che gli seguono appresso. Voglio inferire che anco nella mistione dei due moti equabili orizzontale e perpendicolare vorrei meglio intendere quella potenza del lor composto. Ora, Signor Salviati, V. S. intende il nostro bisogno e desiderio.

Salv. Il desiderio è molto ragionevole, e tenterò se l'avere io più lungo tempo potuto pensarvi sopra, può agevolare la vostra intelligenza. Ma converrà comportarmi e scusarmi, se nel discorrere anderò replicando buona parte delle cose sin qui poste dall'Autore.

Discorrer determinatamente circa i movimenti e lor velocità o impeti, siano quelli o equabili o naturalmente accelerati, non possiamo noi senza prima determinar della misura, che usar vogliamo per misurar tali velocità, come anco della misura del tempo. Quanto alla misura del tempo, già abbiamo la comunemente ricevuta per tutto delle ore, minuti primi e secondi ec.; e come per misura del tempo ci è la detta comune ricevuta da tutti, così bisogna assegnarne una per le velocità, che appresso tutti sia comunemente intesa e ricevuta, cioè che appresso tutti sia l'istessa. Atta per tale uso ha stimato l'Autore, come si è dichiarato, esser la velocità dei gravi naturalmente descendenti, dei quali le crescenti velocità in tutte le parti del mondo serbano l' istesso tenore. Sì che quel grado di velocità che (per esempio) acquista una palla di piombo di una libbra nell'esser, partendosi dalla quiete, scesa perpendicolarmente quanto è l' altezza di una picca, è sempre e in tutti i luoghi il medesimo, e perciò accomodatissimo per esplicar la quantità dell' impeto derivante dalla scesa naturale. Resta poi il trovar modo di determinare anco la quantità dell' impeto in un moto equabile in guisa tale, che tutti coloro che circa di quello discorrono, si formino l' istesso concetto della grandezza e velocità sua; sì che uno non se lo figuri più veloce e un altro meno; onde poi nel congiugnere e mescolar questo da sè concepito equabile con lo statuito moto accelerato, da diversi uomini ne vengano formati diversi concetti di diverse grandezze d' impeti. Per determinare e rappresentare cotal impeto e velocità particolare, non

ha trovato il nostro Autore altro mezzo più accomodato che il servirsi dell'impeto che va acquistando il mobile nel moto naturalmente accelerato, del quale qualsivoglia momento acquistato, convertito in moto equabile, ritien la sua velocità limitata precisamente, e tanta, che in altrettanto tempo quanto fu quello della scesa passa doppio spazio dell'altezza dalla quale è caduto. Ma perchè questo è punto principale nella materia che si tratta, è bene con qualche esempio particolare farsi perfettamente intendere. Ripigliando dunque la velocità e l'impeto acquistato dal grave cadente, come dicemmo, dall'altezza di una picca, della quale velocità vogliamo servirci per misura di altre velocità ed impeti in altre occasioni; e posto per esempio che il tempo di tal caduta sia 4 minuti secondi di ora, per ritrovar da questa tal misura quanto fusse l'impeto del cadente da qualsivoglia altra altezza maggiore o minore, non doviamo dalla proporzione, la quale quest'altra altezza avesse con l'altezza di una picca, argomentare o concludere la quantità dell'impeto acquistato in questa seconda altezza, stimando, per esempio, che il cadente da quadrupla altezza avesse acquistato quadrupla velocità, perchè ciò è falso: imperocchè non cresce o cala la velocità del moto naturalmente accelerato secondo la proporzione degli spazj, ma ben secondo quella dei tempi, della quale quella degli spazj è maggiore in duplicata proporzione, come già fu dimostrato. Però quando noi avessimo in una linea retta assegnatane una parte per misura della velocità, ed anco del tempo e dello spazio in tal tempo passato (che per brevità tutte tre queste grandezze con un'istessa linea spesse volte vengono rappresentate), per trovar la quantità del tempo, e il grado di velocità che il mobile medesimo in altra distanza averebbe acquistato, ciò otterremo noi, non immediatamente da questa seconda distanza, ma dalla linea che tra le due distanze sarà media proporzionale. Ma con un esempio meglio mi dichiaro. Nella linea AC (*Fig.* 113) perpendicolare all'orizzonte intendasi la parte AB essere uno spazio passato da un grave naturalmente descendente di moto accelerato: il tempo del qual passaggio, potendo io rappresentarlo con qualsivoglia

linea, voglio per brevità figurarlo esser quanto la medesima linea AB; e parimente per misura dell' impeto e velocità acquistata per tal moto pongo pur l' istessa linea AB, sì che di tutti gli spazj, che nel progresso del discorso si hanno a considerare, la misura sia la parte AB. Stabilite ad arbitrio nostro sotto una sola grandezza AB queste 3 misure di generi di quantità diversissimi, cioè di spazj, di tempi e d' impeti, siaci proposto di dover determinare, nell' assegnato spazio e altezza AC, quanto sia per essere il tempo della scesa del cadente dall'A in C, e quanto l' impeto che in esso termine C si troverà avere acquistato, in relazione al tempo ed all' impeto misurati per la AB. L' uno e l' altro quesito si determinerà pigliando delle due linee AC, AB la media proporzionale AD, affermando, il tempo della caduta per tutto lo spazio AC esser quanto il tempo AD in relazione al tempo AB, posto da principio per la quantità del tempo nella scesa AB. Diremo parimente, l' impeto o grado di velocità, che otterrà il cadente nel termine C, in relazione all' impeto che ebbe in B, esser quale è la medesima linea AD in relazione all'AB, essendochè la velocità cresce con la medesima proporzione che cresce il tempo: la qual conclusione sebben fu presa come postulato, pur tuttavia volle l'Autore esplicarne l' applicazione di sopra alla proposizione terza.

Ben compreso e stabilito questo punto, venghiamo alla considerazione dell' impeto derivante da due moti composti; uno dei quali sia composto dell'orizzontale e sempre equabile, e del perpendicolare all' orizzonte, ed esso ancora equabile; ma l'altro sia composto dell' orizzontale pur sempre equabile, e del perpendicolare naturalmente accelerato. Se amendue saranno equabili, già si è visto come l' impeto resultante dalla composizione di amendue è in potenza eguale ad amendue, come per chiara intelligenza esemplificheremo così. Intendasi il mobile descendente per la perpendicolare AB (*Fig.* 109) aver, per esempio, 3 gradi d' impeto equabile, ma trasportato per la AB verso C, esser tal velocità ed impeto di 4 gradi, sì che nel tempo medesimo che scendendo passerebbe nella perpendicolare, v. g., 3 braccia, nella orizzontale ne passe-

rebbe 4 ; ma nel composto di amendue le velocità viene nel medesimo tempo dal punto A nel termine C, camminando sempre per la diagonale AC, la quale non è lunga 7, quanto sarebbe la composta delle due AB 3 e BC 4, ma è 5, la qual 5 è in potenza eguale alle due 3 e 4. Imperocchè fatti li quadrati del 3 e del 4, che sono 9 e 16, e questi congiunti insieme fanno 25 per lo quadrato di AC, il quale alli due quadrati di AB e di BC è eguale; onde la AC sarà quanto è il lato, o vogliam dir la radice del quadrato 25, che è 5. Per regola dunque ferma e sicura, quando si debba assegnar la quantità dell'impeto resultante da 2 impeti dati, uno orizzontale e l'altro perpendicolare, ed amendue equabili, si deve di amendue fare 3 quadrati, e componendoli insieme estrar la radice del composto, la quale ci darà la quantità dell'impeto composto di amendue quelli. E così nell'esempio posto, quel mobile che in virtù del *solo* moto perpendicolare averebbe percosso sopra l'orizzonte con 3 gradi di forza, e col moto solo orizzontale averebbe percosso in C con gradi 4, percotendo con amendue gl'impeti congiunti, *secondo la direzione della diagonale AC*, il colpo sarà come quello del percuziente mosso con gradi 5 di velocità e di forza. E questa tal percossa sarebbe del medesimo valore in tutti i punti della diagonale AC, per esser sempre gl'impeti composti i medesimi, non mai cresciuti o diminuiti.

Veggiamo ora quello che accada nel comporre il moto orizzontale equabile con un moto perpendicolare all'orizzonte, il quale cominciando dalla quiete vada naturalmente accelerandosi. Già è manifesto che la diagonale, che è la linea del moto composto di questi due, non è una linea retta, ma semiparabolica, come si è dimostrato; nella quale l'impeto va sempre crescendo, mercè del continuo crescimento della velocità del moto perpendicolare. Laonde per determinar qual sia l'impeto in un assegnato punto di essa diagonale parabolica, prima bisogna assegnar la quantità dell'impeto uniforme orizzontale, e poi investigar qual sia l'impeto del cadente nell'assegnato punto: il che non si può determinare senza la considerazione del tempo decorso dal principio della

composizione dei due moti: la qual considerazione di tempo non si richiede nella composizione dei moti equabili, le velocità ed impeti dei quali son sempre i medesimi: ma qui dove entra nella mistione un moto che, cominciando dalla somma tardità, va crescendo la velocità conforme alla continuazion del tempo, è necessario che la quantità del tempo ci manifesti la quantità del grado di velocità nell' assegnato punto: che quanto al resto poi l' impeto composto di questi due è (come nei moti uniformi) eguale in potenza ad amendue i componenti. Ma qui ancora meglio mi dichiaro con un esempio. Sia nella perpendicolare all' orizzonte AC (*Fig.* **114**) presa qualsivoglia parte AB; la quale figuro che serva per misura dello spazio del moto naturale fatto in essa perpendicolare, e parimente sia misura del tempo ed anco del grado di velocità, o vogliam dire degl' impeti. È primieramente manifesto, che se l' impeto del cadente in B dalla quiete in A si convertirà sopra la BD, parallela all' orizzonte, in moto equabile, la quantità della sua velocità sarà tanta, che nel tempo AB passerà uno spazio doppio dello spazio AB; e tanta sia la linea BD. Posta poi la BC eguale alla BA, e tirata la parallela CE alla BD, e ad essa eguale, descriveremo per i punti B, E la linea parabolica BEI. E perchè nel tempo AB con l' impeto AB si passa l' orizzontale BD o CE, doppia della AB, e passasi ancora in altrettanto tempo la perpendicolare BC con acquisto d' impeto in C eguale al medesimo orizzontale; adunque il mobile, in tanto tempo quanto è AB, si troverà dal B giunto in E per la parabola BE con un impeto composto di due, ciascheduno eguale all' impeto AB. E perchè l' uno di essi è orizzontale e l' altro perpendicolare, l' impeto composto di essi sarà in potenza eguale ad amendue, cioè doppio di uno. Onde posta la BF eguale alla BA, e tirata la diagonale AF, l' impeto e la percossa in E sarà maggior della percossa in B del cadente dall' altezza A, ovvero della percossa dell' impeto orizzontale per la BD, secondo la proporzione di AF ad AB. Ma quando, ritenendo pur sempre la BA per misura dello spazio della caduta dalla quiete in A sino in B, e per misura del tempo e dell' impeto dal cadente acqui-

stato in B, l' altezza BO non fusse eguale, ma maggiore della AB, presa la BG media proporzionale tra esse AB, BO, sarebbe essa BG misura del tempo e dell' impeto in O per la caduta nell' altezza BO, acquistato in O; e lo spazio per l'orizzontale, il quale passato con l' impeto AB nel tempo AB sarebbe doppio della AB, sarà in tutta la durazion del tempo BG tanto maggiore, quanto a proporzione la BG è maggiore della BA. Posta dunque la LB eguale alla BG, e tirata la diagonale AL, averemo da essa la quantità composta delli due impeti orizzontale e perpendicolare, dai quali si descrive la parabola; dei quali l' orizzontale ed equabile è l' acquistato in B per la caduta AB, e l' altro è l' acquistato in O, o vogliam dire in I, per la caduta BO, il cui tempo fu BG, come anco la quantità del suo momento. E con simil discorso investigheremo l' impeto nel termine estremo della parabola, quando l' altezza sua fusse minore della sublimità AB, prendendo tra amendue la media; la quale posta nell' orizzontale in luogo della BF, e congiunta la diagonale, come AF, averemo da questa la quantità dell' impeto nell' estremo termine della parabola.

A quanto sin qui si è considerato circa questi impeti, colpi o vogliam dir percosse di tali projetti, convien aggiugnere un' altra molto necessaria considerazione, e questa è che non basta por mente alla sola velocità del projetto per ben determinare della forza ed energia della percossa, ma convien chiamare a parte ancora lo stato e condizione di quello che riceve la percossa; nell' efficacia della quale esso per più rispetti ha gran participazione e interesse. E prima, non è chi non intenda che la cosa percossa in tanto patisce violenza dalla velocità del percuziente, in quanto ella se gli oppone e frena in tutto o in parte il moto di quello: che se il colpo arriverà sopra tale, che ceda alla velocità del percuziente senza resistenza alcuna, tal colpo sarà nullo. E colui che corre per ferir con lancia il suo nimico, se nel sopraggiugnerlo accaderà che quello si muova fuggendo con pari velocità, non farà colpo, e l' azione sarà un semplice toccare senza offendere.

Ma se la percossa verrà ricevuta in un oggetto che non in tutto ceda al percuziente, ma solamente in parte, la percossa danneggerà, ma non con tutto l'impeto, ma solo con l'eccesso della velocità di esso percuziente sopra la velocità della ritirata e cedenza del percosso: sì che, se, v. g., il percuziente arriverà con 10 gradi di velocità sopra il percosso, il quale, cedendo in parte, si ritiri con gradi 4, l'impeto e percossa sarà come di gradi 6. E finalmente intera e massima sarà la percossa, per la parte del percuziente, quando il percosso nulla ceda, ma interamente si opponga e fermi tutto il moto del percuziente; se però questo può accadere. Ed ho detto per la parte del percuziente, perchè quando il percosso si movesse con moto contrario verso il percuziente, il colpo e l'incontro si farebbe tanto più gagliardo, quanto le due velocità contrarie unite son maggiori che la sola del percuziente. Di più conviene anco avvertire, che il ceder più o meno può derivare non solamente dalla qualità della materia più o men dura, come se sia di ferro, di piombo o di lana ec., ma dalla positura del corpo che riceve la percossa: la qual positura se sarà tale che il moto del percuziente la vada a investire ad angoli retti, l'impeto del colpo sarà il massimo; ma se il moto verrà obliquamente, e come diciam noi, a scancìo, il colpo sarà più debole, e più e più secondo la maggiore obliquità; perchè in oggetto in tal modo situato, ancorchè di materia sodissima, non si spegne e ferma tutto l'impeto e moto del percuziente, il quale sfuggendo passa oltre, continuando almeno in qualche parte a muoversi sopra la superficie del resistente opposto. Quando dunque si è di sopra determinato della grandezza dell'impeto del projetto nell'estremità della linea parabolica, si deve intendere della percossa ricevuta sopra una linea ad angoli retti ad essa parabolica, ovvero alla tangente la parabola nel detto punto: perchè sebben quel moto è composto di un orizzontale e di un perpendicolare, l'impeto nè sopra l'orizzontale, nè sopra il piano eretto all'orizzonte è il massimo, venendo sopra amendue ricevuto obliquamente.

Sagr. Il ricordar V. S. questi colpi e queste percosse mi

ha risvegliato nella mente un problema, o vogliam dire questione meccanica, della quale non ho trovato appresso autore alcuno la soluzione, nè cosa che mi scemi la maraviglia, o almeno in parte mi quieti l'intelletto. E il dubbio e lo stupor mio consiste nel non restar capace onde possa derivare, e da qual principio possa dependere l'energia e la forza immensa che si vede consistere nella percossa, mentre col semplice colpo di un martello, che non abbia peso maggiore di 8 o 10 libbre, veggiamo superarsi resistenze tali, le quali non cederanno al peso di un grave, che senza percossa vi faccia impeto solamente calcando e premendo, benchè la gravità di quello passi molte centinaia di libbre. Io vorrei pur trovar modo di misurar la forza di questa percossa, la quale non penso però che sia infinita, anzi stimo che ella abbia il suo termine da potersi pareggiare e finalmente regolare con altre forze di gravità prementi, o di leve o di viti o di altri strumenti meccanici, dei quali io a soddisfazione resto capace della multiplicazione della forza loro.

Salv. V. S. non è solo nella maraviglia dell'effetto e nella oscurità della cagione di così stupendo accidente. Io vi pensai per alcun tempo in vano, accrescendo sempre la confusione, sin che finalmente, incontrandomi nel nostro Accademico, da esso ricevei doppia consolazione; prima nel sentire come egli ancora era stato lungo tempo nelle medesime tenebre, e poi nel dirmi che dopo l'avervi in vita sua consumate molte migliara di ore specolando e filosofando, ne aveva conseguite alcune cognizioni lontane dai nostri primi concetti, e però nuove e per la novità ammirande. E perchè omai so che la curiosità di V. S. volentieri sentirebbe quei pensieri che si allontanano dall'opinabile, non aspetterò la sua richiesta, ma le do parola, che spedita che averemo la lettura di questo trattato dei projetti, gli spiegherò tutte quelle fantasie, o vogliamo dire stravaganze, che dei discorsi dell'Accademico mi son rimaste nella memoria. In tanto seguitiamo le proposizioni dell'Autore.

Problema II, Propositio V.

In axe extenso datae parabolae punctum sublime reperire, ex quo cadens parabolam ipsam describit.

Sit parabola AB (*Fig.* 115), cujus amplitudo HB, et axis extensus HC, in quo reperienda sit sublimitas, ex qua cadens, impetum in A conceptum in horizontalem convertens, parabolam AB describat. Ducatur horizontalis AG, quae erit parallela ipsi BH, et posita AF aequali AH, ducatur recta FB, quae parabolam tanget in B, et orizontalem AG in G secabit; accipiaturque ipsarum FA, AG tertia proportionalis AC. Dico C esse punctum sublime quaesitum, ex quo cadens ex quiete in C, et conceptum impetum in A in horizontalem convertens, superveniente impetu descensus in H ex quiete in A, parabolam AB describet. Si enim intelligamus, CA esse mensuram temporis descensus ex C in A, nec non impetus acquisiti in A, erit AG (media nempe inter CA, AF) tempus et impetus venientis ex F in A, seu ex A in H. Et quia veniens ex C tempore CA, cum impetu acquisito in A, conficit in latione horizontali motu aequabili duplam CA; ergo etiam latum eodem impetu conficiet in tempore AG duplam GA, mediam nempe BH (spatia enim confecta eodem motu aequabili sunt inter se ut eorundem motuum tempora), et in perpendiculari motu ex quiete, eodem tempore GA conficitur AH; ergo eodem tempore conficiuntur a mobili amplitudo HB et altitudo AH. Describitur ergo parabola AB ex casu venientis a sublimitate C, quod quaerebatur.

Corollarium.

Hinc constat, dimidiam basim, seu amplitudinem semiparabolae (quae est quarta pars amplitudinis integrae parabolae), esse mediam proportionalem inter altitudinem ejus, et sublimitatem, ex qua cadens eam designat (1).

(1) Di qui si cava esser impossibile che il projetto vada punto per linea retta, dovendo la metà dell'amplitudine sempre esser media proporzionale fra l'altezza e la sublimità, la qual converrebbe che fosse infinita. (*N. del Viviani*).

PROBLEMA III, PROPOSITIO VI.

Data sublimitate et altitudine, semiparabolae amplitudinem reperire.

Sit (*Fig.* 116) ad horizontalem lineam DC perpendicularis AC, in qua data sit altitudo CB, et sublimitas BA; oportet in horizontali CD amplitudinem semiparabolae reperire, quae ex sublimitate BA cum altitudine BC designatur. Accipiatur media proportionalis inter CB, BA, cujus CD ponatur dupla. Dico CD esse amplitudinem quaesitam. Id autem ex praecedenti manifestum est.

THEOREMA IV, PROPOSITIO VII.

In projectis, a quibus semiparabolae ejusdem amplitudinis describuntur, minor requiritur impetus in eo, quod describit illam, cujus amplitudo suae altitudinis est dupla, quam in quolibet alio.

Sit enim semiparabola BD (*Fig.* 117), cujus amplitudo CD dupla sit altitudinis suae CB, et in axe in sublimi extenso ponatur BA altitudini BC aequalis: et jungatur AD, quae semiparabolam tanget in D, et horizontalem BE secabit in E, eritque BE ipsi BC, seu BA, aequalis: constat, ipsam describi a projecto, cujus impetus aequabilis horizontalis sit, qualis est in B cadentis ex quiete in A, impetus vero naturalis deorsum, qualis est venientis in C ex quiete in B. Ex quo constat, impetum ex istis compositum, quique in termino D impingit, esse ut diagonalem AE, potentia nempe ipsis ambobus aequalem. Sit modo quaelibet alia semiparabola GD; cujus amplitudo eadem GD, altitudo vero CG minor, vel major altitudine BC: eamque tangat HD, secans horizontalem per G ductam in puncto K; et fiat, ut HG ad GK, ita KG ad GL; erit ex ante demonstratis altitudo GL, ex qua cadens describet parabolam GD. Inter AB et GL media proportionalis sit GM: erit GM tempus et momentum, sive impetus in G cadentis ex L (positum enim est, AB esse mensuram temporis, et impetus in B cadentis ex A). Sit rursus inter HC, CG media GN, quae erit temporis et impetus mensura

cadentis ex G in C. Si igitur jungatur MN, erit ipsa impetus mensura projecti per parabolam DG, illidentis in termino D. Quem quidem impetum majorem esse dico impetu projecti per parabolam BD, cujus quantitas erat ut AE. Quia enim GN posita est media inter BC, CG, est autem BC aequalis BE, hoc est GK (est enim unaquaque subdupla DC): erit, ut CG ad GN, ita NG ad GK, et ut CG seu HG ad GK, ita quadratum NG ad quadratum GK; ut autem HG ad GK, ita facta est KG ad GL, ergo ut quadratum NG ad quadratum GK, ita KG ad GL; sed ut KG ad GL, ita quadratum KG ad quadratum GM (media enim est GM inter KG, GL, cum KG sit aequalis AB), ergo tria quadrata NG, KG, GM sunt continue proportionalia: et duo extrema NG, GM simul sumpta, idest quadratum MN, majus quam duplum quadrati KG, cujus quadratum AE duplum est: ergo quadratum MN majus est quadrato AE, et linea MN major linea EA; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc apparet, quod conversim in projecto ex termino D per semiparabolam DB minor impetus requiritur, quam per quamcunque aliam juxta elevationem majorem, seu minorem elevatione semiparabolae BD, quae est juxta tangentem AD, angulum semirectum supra horizontem continentem. Quod cum ita sit, constat quod, si cum eodem impetu fiant projectiones ex termino D juxta diversas elevationes, maxima projectio, seu amplitudo semiparabolae, sive integrae parabolae, erit ea, quae consequitur ad elevationem anguli semirecti; reliquae vero juxta majores, sive minores angulos factae, minores erunt.

Sagr. Piena di maraviglia e di diletto insieme è la forza delle dimostrazioni necessarie, quali sono le sole matematiche. Già sapeva, io per fede prestata alle relazioni di più bombardieri, che di tutti i tiri di volata dell' artiglieria, o del mortaro, il massimo, cioè quello che in maggior lontananza caccia la palla, era il fatto all' elevazione di mezzo angolo retto, che essi dicono del sesto punto della squadra; ma

l'intender la cagione, onde ciò avvenga, supera d' infinito intervallo la semplice notizia avuta dalle altrui attestazioni, ed anco da molte replicate esperienze.

Salv. V. S. molto veridicamente discorre: e la cognizione di un solo effetto acquistata per le sue cause ci apre l' intelletto a intendere ed assicurarci di altri effetti, senza bisogno di ricorrere all' esperienze, come appunto avviene nel presente caso; dove guadagnata per lo discorso dimostrativo la certezza dell' essere il massimo di tutti i tiri di volata quello dell' elevazione dell' angolo semiretto, ci dimostra l'Autore quello che forse per l' esperienza non è stato osservato; e questo è, che degli altri tiri, quelli sono tra di loro eguali, le elevazioni dei quali superano o mancano per angoli eguali dalla semiretta: sì che due palle tirate dall' orizzonte, una secondo l'elevazione di 7 punti e l'altra di 5, andranno a ferir su l'orizzonte in lontananze eguali, e così eguali saranno i tiri di 8 e di 4 punti, di 9 e di 3 ec. Or sentiamone la dimostrazione.

Theorema V, Propositio VIII.

Amplitudines parabolarum a projectis eodem impetu explosis factarum, juxta elevationes per angulos aequales supra et infra a semirecto distantes, aequales sunt inter se.

Trianguli MCB (*Fig.* 118) circa angulum rectum C sint horizontalis BC et perpendicularis CM aequales; sic enim angulus MBC semireetus erit: et extensa CM in D, supra et infra diagonalem MB constituantur in B duo anguli aequales, MBE, MBD. Demonstrandum est, amplitudines parabolarum a projectis explosis eodem impetu ex termino B, juxta elevationes angulorum EBC, DBC, esse aequales. Quia enim angulus externus BMC internis MDB, DBM est aequalis, iisdem aequabitur quoque angulus MBC. Quod si loco anguli DBM ponamus MBE, erit idem angulus MBC duobus MBE, BDC aequalis: et dempto communi MBE, reliquus BDC reliquo EBC erit aequalis. Sunt igitur trianguli DCB vel DHI, et BCE vel GFE similes. Dividantur rectae DC, EC bifariam in H et F; et ducantur HI, FG horizontali CB aequidistantes; et ut DH

ad HI, ita fiat IH ad HL: erit triangulus IHL similis triangulo IHD, cui etiam similis est EGF. Cumque IH, GF sint aequales (dimidiae nempe ipsius BC), erit FE, idest FC, aequalis HL: et addita communi FH, erit CH ipsi FL aequalis. Si itaque intelligamus per H et B semiparabolam esse descriptam, cujus altitudo erit HC, sublimitas vero HL, erit amplitudo ejus CB; quae dupla est ad HI, media scilicet inter DH, seu CH, et HL; eamque tanget DB, aequalibus existentibus CH, HD. Quod si rursus parabolam per FB descriptam concipiamus a sublimitate FL cum altitudine FC; quarum media proportionalis est FG; cujus dupla est horizontalis CB: erit pariter CB ejus amplitudo: illamque tanget EB, cum EF, FC sint aequales. Distant anguli DBC, EBC (elevationes scilicet ipsarum) aequaliter a semirecto; *et impetus in puncto B utriusque parabolae inter se sunt aequales cum repraesententur ab aequalibus lineis IL, EG, ut mox ostendam*; ergo patet propositum.

Quod autem lineae IL, GE praedictorum momentorum sint mensurae, sic patet. Cum enim sublimitas parabolae HB sit LH, parabolae vero FB sit LF, si impetus horizontalis parabolae HB ponatur esse LH, parabolae FB erit GF media proportionalis inter LH, LF sublimitates; et si impetus horizontalis parabolae HB acquisitus per LH est LH, impetus ejusdem parabolae perpendicularis post HC erit HI media, et ideo diagonalis IL erit mensura impetus compositi in puncto B post excursum parabolae HB per 4^{am} hujus; at cum impetus perpendicularis post HC sit HI, post FC in parabola FB erit media FE; et horizontalis est, ut vidimus, FG; ergo impetus compositus erit GE, quod erat demonstrandum.

THEOREMA VI, PROPOSITIO IX.

Aequales sunt amplitudines parabolarum, quarum altitudines et sublimitates e contrario sibi respondent.

Parabolae FH (*Fig.* 119) altitudo GF ad altitudinem CB parabolae BD eandem habeat rationem, quam sublimitas BA ad sublimitatem FE. Dico, amplitudinem HG amplitudini DC esse aequalem. Cum enim prima GF ad secundam CB eandem

habeat rationem, quam tertia BA ad quartam FE; rectangulum GFE primae et quartae aequale erit rectangulo CBA secundae et tertiae; ergo quadrata, quae hisce rectangulis aequalia sunt, aequalia erunt inter se: rectangulo vero GFE aequale est quadratum dimidiae GH: rectangulo autem CBA aequale est quadratum dimidiae CD, ergo quadrata haec, et eorum latera, et laterum dupla, aequalia erunt. Haec autem sunt amplitudines GH, CD, ergo patet propositum.

LEMMA PRO SEQUENTI.

Si recta linea secta fuerit utcunque, quadrata mediarum inter totam et partes aequalia sunt quadrato totius.

Secta sit AB (*Fig.* 120) utcunque in C. Dico, quadrata linearum mediarum inter totam AB, et partes AC, CB simul sumpta, aequalia esse quadrato totius AB. Id autem constat descripto semicirculo super tota BA, et ex C erecta perpendiculari CD, junctisque DA, DB. Est enim DA media inter BA, AC, estque DB media inter AB, BC, suntque quadrata linearum DA, DB simul sumpta aequalia quadrato totius AB, recto existente angulo ADB in semicirculo; ergo patet propositum.

Theorema VII, Propositio X.

Impetus, seu momentum cujuslibet semiparabolae aequatur momento naturaliter cadentis in perpendiculari ad horizontem, quae tanta sit quanta est composita ex sublimitate cum altitudine semiparabolae.

Sit semiparabola AB (*Fig.* 121), cujus sublimitas DA, altitudo vero AC, ex quibus componitur perpendicularis DC. Dico, impetum semiparabolae in B esse aequalem momento naturaliter descendentis ex D in C. Ponatur ipsamet DC mensura esse temporis et impetus: et accipiatur media proportionalis inter CD, DA, cui aequalis ponatur CF. Sit insuper inter DC, CA media CE. Erit jam CF mensura temporis, et momenti descendentis per DA ex quiete in D; CE vero tempus erit et momentum descendentis per AC ex quiete in A; et diagonalis EF erit momentum ex illis compositum, hoc est semiparabolae in B. Et quia DC secta est utcunque in A,

suntque CF, CE mediae inter totam CD et partes DA, AC: erunt harum quadrata simul sumpta aequalia quadrato totius ex lemmate superiori; verum iisdem quadratis aequatur quoque quadratum ipsius EF, ergo et linea EF ipsi DC aequalis est. Ex quo constat, momenta per DC, et per semiparabolam AB, in C et B esse aequalia; quod oportebat.

Corollarium.

Hinc constat semiparabolarum omnium, quarum altitudines cum sublimitatibus junctae pares sunt, impetus quoque aequales esse.

Problema II, Propositio XI.

Dato impetu, et amplitudine semiparabolae, altitudinem ejus reperire.

Impetus datus definitus sit a perpendiculo ad horizontem AB (*Fig.* 122); amplitudo vero in horizontali sit BC. Oportet sublimitatem semiparabolae reperire, cujus impetus sit AB, amplitudo vero BC. Constat ex jam demonstratis, dimidiam amplitudinem BC futuram esse mediam proportionalem inter altitudinem et sublimitatem ipsius semiparabolae, cujus impetus ex praecedenti est idem cum impetu cadentis ex quiete in A per totam AB. Est propterea BA ita secanda, ut rectangulum a partibus ejus contentum aequale sit quadrato dimidiae BC, quae sit BD. Hinc apparet necessarium esse, quod DB dimidiam BA non superet, rectangulorum enim a partibus contentorum maximum est, cum tota linea in partes secatur aequales. Dividatur itaque BA bifariam in E. Quod si ipsa BD aequalis fuerit BE, absolutum est opus: eritque semiparabolae altitudo BE, sublimitas vero EA (et ecce parabolae elevationis semirectae amplitudinem, ut supra demonstratum est, omnium esse maximam ab eodem impetu descriptarum). At minor sit BD quam dimidia BA, quae ita secanda est, ut rectangulum sub partibus quadrato BD sit aequale. Supra EA semicirculus describatur, in quo ex A applicetur AF aequalis BD, et jungatur FE, cui secetur pars aequalis EG. Erit jam rectangulum BGA cum quadrato EG aequale quadrato EA,

cui quoque aequalia sunt duo quadrata AF, FE. Demptis itaque quadratis GE, FE, aequalibus, remanet rectangulum BGA aequale quadrato AF, nempe BD; et linea BD media proportionalis inter BG, GA. Ex quo patet, semiparabolae, cujus amplitudo BC, impetus vero AB, altitudinem esse BG, sublimitatem GA. Quod si ponatur inferius BI aequalis GA, erit haec altitudo; IA vero sublimitas semiparabolae IC.

Ex demonstratis hucusque possumus

PROBLEMA III, PROPOSITIO XII.

Semiparabolarum omnium amplitudines calculo colligere, atque in tabulas exigere, quae a projectis eodem impetu explosis describuntur.

Constat ex praedemonstratis, tunc parabolas a projectis eodem impetu designari, cum illarum sublimitates cum altitudinibus junctae aequales conficiant perpendiculares supra horizontem. Inter easdem ergo parallelas horizontales hae perpendiculares comprehendi debent. Ponatur itaque horizontali CB (*Fig.* 123) perpendicularis BA aequalis, et connectatur diagonalis AC. Erit angulus ACB semirectus, gr. 45. Divisaque perpendiculari BA bifariam in D, semiparabola DC erit ea, quae a sublimitate AD cum altitudine DB designatur: et impetus ejus in C tantus erit, quantus est in B mobilis venientis ex quiete in A per lineam AB. Et, si ducatur AG aequidistans BC, reliquarum omnium semiparabolarum, quarum impetus futurus sit idem cum modo explicato, altitudines cum sublimitatibus junctae, spatium inter parallelas AG, BC explere debent. Insuper, cum jam demonstratum sit, semiparabolarum, quarum tangentes aequaliter, sive supra sive infra, ab elevatione semirecta distant, amplitudines aequales esse, calculus, quem pro majoribus elevationibus compilabimus, pro minoribus quoque deserviet. Eligimus praeterea numerum partium decem mille (10,000) pro maxima amplitudine projectionis semiparabolae ad elevationem gr. 45 factae: itaque tanta supponatur esse linea BA, et amplitudo semiparabolae BC. Eligimus autem numerum 10,000, quia utimur in calculis tabula tangentium, cujus hic numerus congruit cum

tangente gr. 45. Jam, ad opus accedendo, ducatur CE, angulum ECB angulo ACB majorem (acutum tamen) comprehendens: sitque semiparabola designanda, quae a linea EC tangatur, et cujus sublimitas cum altitudine juncta ipsam BA adaequet. Ex tabula tangentium per angulum datum BCE tangens ipsa BE accipiatur; quae bifariam dividatur in F. Deinde ipsarum BF, BI (dimidiae BC) tertia proportionalis reperiatur, quae necessario major erit quam FA. Sit igitur illa FO. Semiparabolae igitur in triangulo ECB inscriptae, juxta tangentem CE, cujus amplitudo est CB, reperta est altitudo BF et sublimitas FO. Verum tota BO supra parallelas AG, CB attollitur, cum nobis opus sit inter easdem contineri: sic enim tum ipsa, tum semiparabolae DC describentur a projectis ex C impetu eodem explosis. Reperienda igitur est altera huic similis (innumerae enim intra angulum BCE majores et minores inter se similes designari possunt), cujus composita sublimitas cum altitudine (homologa scilicet ipsi BA) aequetur BA. Fiat igitur, ut OB ad BA, ita amplitudo BC ad CR, et inventa erit CR, amplitudo scilicet semiparabolae juxta elevationem anguli BCE, cujus sublimitas cum altitudine juncta spatium a parallelis GA, CB contentum adaequat; quod quaerebatur. Operatio itaque talis erit:

Anguli dati BCE tangens accipiatur, cujus medietati adjungatur tertia proportionalis ipsius, et medietatis BC, quae sit FO. Fiat deinde ut OB ad BA, ita BC ad aliam, quae sit CR, amplitudo nempe quaesita. Exemplum ponamus.

Sit angulus ECB gr. 50, erit ejus tangens 11,918, cujus dimidium, nempe BF, 5959, dimidia BC 5000, harum dimidiarum tertia proportionalis 4195, quae addita ipsi BF conficit 10,154 pro ipsa BO. Fiat rursus ut OB ad BA, nempe ut 10,154 ad 10,000, ita BC, nempe 10,000 (utraque enim gr. 45 est tangens) ad aliam, et habebimus quaesitam amplitudinem RC, 9848, qualium BC (maxima amplitudo) est 10,000. Harum autem duplae sunt amplitudines integrarum parabolarum, nempe 19,696 et 20,000. Tantaque est etiam amplitudo parabolae juxta elevationem gr. 40 cum aequaliter distet a gr. 45.

Sagr. Mi manca per l' intiera intelligenza di questa dimostrazione il saper come sia vero che la terza proporzionale delle BF, BI sia (come dice l'Autore) necessariamente maggiore della FA.

Salv. Tal conseguenza mi par che si possa dedurre in tal modo. Il quadrato della media di tre linee proporzionali è eguale al rettangolo dell' altre due, onde il quadrato della BI, o della BD ad essa eguale, dee esser eguale al rettangolo della prima FB nella terza da ritrovarsi; la qual terza è necessario che sia maggiore della FA, perchè il rettangolo della BF in FA è minore del quadrato BD; ed il mancamento è quanto il quadrato della DF, come dimostra Euclide in una del secondo. Debbesi anco avvertire che il punto F, che divide la tangente EB in mezzo, altre molte volte cadrà sopra il punto A, ed una volta anco nell' istesso A; nei quali casi è per sè noto che la terza proporzionale della metà della tangente, e della BI (che dà la sublimità), è tutta sopra la A. Ma l'Autore ha preso il caso, dove non era manifesto che la detta terza proporzionale fusse sempre maggiore della FA; e che però aggiunta sopra il punto F passasse la parallela AG. Or seguitiamo.

Non erit inutile ope hujus tabulae alteram componere complectentem altitudines earundem semiparabolarum projectorum ab eodem impetu. Constructio autem talis erit:

Problema IV, Propositio XIII.

Ex datis semiparabolarum amplitudinis in sequenti tabula digestis, retentoque communi impetu, quo unaquaeque describitur, singularum semiparabolarum altitudines elicere.

Sit amplitudo data BC (*Fig.* 124). Impetus vero, qui semper idem intelligatur, mensura sit AB, aggregatum nempe altitudinis et sublimitatis. Reperienda est ac distinguenda ipsamet altitudo. Quod quidem tunc consequemur, cum BA ita divisa fuerit, ut rectangulum sub ejus partibus contentum aequale sit quadrato dimidiae amplitudinis BC. Incidat talis divisio in F. Et utraque AB, BC secetur bifariam in D, I. Est

igitur quadratum IB aequale rectangulo BFA: quadratum vero DA aequatur eidem rectangulo cum quadrato FD. Si igitur ex quadrato DA auferatur quadratum BI, quod rectangulo BFA est aequale, remanebit quadratum FD, cujus latus DF additum lineae BD dabit quaesitam altitudinem BF. Componitur itaque sic ex datis. Ex quadrato dimidiae BA notae aufer quadratum BI pariter notae: residui sume radicem quadratam, quam adde notae BD, et habebis altitudinem quaesitam BF. Exemplum. Invenienda sit altitudo semiparabolae ad elevationem gr. 55 descriptae. Amplitudo ex praecedenti tabula est 9396, ejus dimidium est 4698, quadratum ipsius 22,071,204; hoc dempto ex quadrato dimidiae BA, quod semper idem est, nempe 25,000,000, residuum est 2,928,796, cujus radix quadrata 1710 proxime. Haec dimidiae BA, nempe 5000 addita, exhibet 6710, tantaque est altitudo BF. Non erit inutile, tertiam exponere tabulam, altitudines et sublimitates continentem semiparabolarum, quarum eadem futura sit amplitudo.

Sagr. Questa vedrò io molto volentieri, mentrechè per essa potrò venir in cognizione della differenza degl' impeti e delle forze che si ricercano per cacciare il projetto nella medesima lontananza con tiri che chiamano di volata; la qual differenza credo che sia grandissima secondo le diverse elevazioni: sì che, per esempio, se altri volesse alla elevazione di 3 o 4 gradi, o di 87 o 88, far cader la palla dove fu cacciata alla elevazione di 45 (dove si è mostrato ricercarsi l' impeto minimo), credo si ricercherebbe un eccesso immenso di forza.

Salv. V. S. stima benissimo, e vedrà che per eseguire l' opera intera in tutte le elevazioni bisogna andare a gran passo verso l' impeto infinito. Or vediamo la costruzione della Tavola.

Amplitudines semiparabolarum ab eodem impetu descriptarum.

gr.		gr.
45	10000	
46	9994	44
47	9976	43
48	9945	42
49	9902	41
50	9848	40
51	9782	39
52	9704	38
53	9612	37
54	9511	36
55	9396	35
56	9272	34
57	9136	33
58	8989	32
59	8829	31
60	8659	30
61	8481	29
62	8290	28
63	8090	27
64	7880	26
65	7660	25
66	7431	24
67	7191	23
68	6944	22
69	6692	21
70	6428	20
71	6157	19
72	5878	18
73	5592	17
74	5300	16
75	5000	15
76	4694	14
77	4383	13
78	4067	12
79	3746	11
80	3420	10
81	3090	9
82	2756	8
83	2419	7
84	2079	6
85	1736	5
86	1391	4
87	1044	3
88	698	2
89	349	1

Gradus Elevationum.

Altitudines semiparabolarum, quarum impetus sit idem.

gr.		gr.	
1	3	46	5173
2	13	47	5346
3	28	48	5523
4	50	49	5698
5	76	50	5868
6	108	51	6038
7	150	52	6207
8	194	53	6379
9	245	54	6546
10	302	55	6710
11	365	56	6873
12	432	57	7033
13	506	58	7190
14	585	59	7348
15	670	60	7502
16	760	61	7649
17	855	62	7796
18	955	63	7939
19	1060	64	8078
20	1170	65	8214
21	1285	66	8346
22	1402	67	8474
23	1527	68	8497
24	1685	69	8715
25	1786	70	8830
26	1922	71	8940
27	2061	72	9045
28	2204	73	9144
29	2351	74	9240
30	2499	75	9330
31	2653	76	9415
32	2810	77	9493
33	2967	78	9567
34	3128	79	9636
35	3289	80	9698
36	3456	81	9755
37	3621	82	9806
38	3793	83	9851
39	3962	84	9890
40	4132	85	9924
41	4302	86	9951
42	4477	87	9972
43	4654	88	9987
44	4827	89	9998
45	5000	90	10000

Gradus Elevationum.

Tabula continens altitudines et sublimitates semiparabolarum, quarum amplitudines eaedem sint, partium scilicet 10000 ad singulos gr. elevationis calculata.

Gradus Elevationum.

gr.	*alt.*	*subl.*	*gr.*	*alt.*	*subl.*
1	87	286533	46	5177	4828
2	175	142450	47	5362	4662
3	262	95802	48	5553	4502
4	349	71531	49	5752	4346
5	437	57142	50	5959	4196
6	525	47573	51	6174	4048
7	614	40716	52	6395	3906
8	702	35587	53	6635	3768
9	792	31565	54	6882	3632
10	881	28356	55	7141	3500
11	972	25720	56	7413	3372
12	1062	23518	57	7699	3247
13	1154	21701	58	8002	3124
14	1246	20056	59	8336	3008
15	1339	18660	60	8659	2887
16	1434	17405	61	9020	2772
17	1528	16355	62	9404	2658
18	1624	15388	63	9814	2547
19	1722	14522	64	10253	2438
20	1820	13736	65	10722	2332
21	1919	13025	66	11230	2226
22	2020	12376	67	11878	2122
23	2122	11778	68	12376	2020
24	2226	11230	69	13025	1919
25	2332	10722	70	13736	1820
26	2438	18253	71	14522	1722
27	2547	9814	72	15388	1624
28	2658	9404	73	16355	1528
29	2772	9020	74	17405	1434
30	2887	8659	75	18660	1339
31	3008	8336	76	20056	1246
32	3124	8002	77	21701	1154
33	3247	7699	78	23518	1062
34	3372	7413	79	25720	972
35	3500	7141	80	28356	881
36	3638	6282	81	31565	792
37	3768	6635	82	35573	702
38	3906	6395	83	40716	614
39	4048	6174	84	47573	525
40	4196	5959	85	57142	437
41	4346	5752	86	71531	349
42	4502	5553	87	95802	262
43	4662	5362	88	142450	175
44	4828	5177	89	286533	87
45	5000	5000	90	*infinita*	

Problema V, Propositio XIV.

Altitudines, atque sublimitates semiparabolarum, quarum amplitudines aequales futurae sint, per singulos elevationis gradus reperire.

Haec omnia facili negotio consequemur. Posita enim semiparabolae amplitudine partium semper 10,000, medietas tangentis cujuslibet gradus elevationis altitudinem exhibet. Ut exempli gratia, semiparabolae, cujus elevatio sit gr. 30, amplitudo vero, ut ponitur, partium 10,000, altitudo erit 2887, tanta enim est proxime medietas tangentis. Inventa autem altitudine, sublimitatem eliciemus tali pacto. Cum demonstratum sit dimidiam amplitudinem semiparabolae mediam esse proportionalem inter altitudinem et sublimitatem, sitque altitudo jam reperta, medietas vero amplitudinis semper eadem, partium scilicet 5000, si hujus quadratum per altitudinem datam diviserimus, sublimitas quaesita exurget. Ut in exemplo. Altitudo reperta fuit 2887. Quadratum partium 5000 est 25,000,000, quod divisum per 2887 dat 8659 proxime pro sublimitate quaesita.

Salv. Or qui si vede primieramente come è verissimo il concetto accennato di sopra, che nelle diverse elevazioni, quanto più si allontanano dalla media, o sia nelle più alte o nelle più basse, tanto si ricerca maggiore impeto e violenza per cacciar il projetto nella medesima lontananza. Imperocchè consistendo l' impeto nella mistione dei due moti, orizzontale equabile e perpendicolare naturalmente accelerato, del quale impeto viene ad esser misura l' aggregato dell' altezza e della sublimità, vedesi dalla proposta tavola tale aggregato esser minimo nell' elevazione di gr. 45, dove l' altezza e la sublimità sono eguali, cioè 5000 ciascheduna; e l' aggregato loro 10,000. Che se noi cercheremo ad altra maggiore altezza, come per esempio di gr. 50, troveremo l' altezza esser 5959, e la sublimità 4196, che giunti insieme sommano 10155. E tanto troveremo parimente esser l' impeto di gr. 40, essendo questa e quella elevazione egualmente lontane dalla media.

Dove dobbiamo secondariamente notare esser vero che eguali impeti si ricercano a due a due delle elevazioni distanti egualmente dalla media, con questa bella alternazione di più, che le altezze e le sublimità delle superiori elevazioni contrariamente rispondono alle sublimità ed altezze delle inferiori: sì che dove, nell'esempio proposto, nell'elevazione di 50 gr. l'altezza è 5959, e la sublimità 4196, nell'elevazione di gr. 40 accade all'incontro l'altezza esser 4196 e la sublimità 5959, e l'istesso accade in tutte l'altre senza veruna differenza: se non in quanto, per fuggire il tedio del calcolare, non si è tenuto conto di alcune frazioni, le quali in somme così grandi non sono di momento, nè di pregiudizio alcuno.

Sagr. Io vo osservando, come delli due impeti orizzontale e perpendicolare nelle projezioni, quanto più sono sublimi, tanto meno vi si ricerca dell'orizzontale e molto del perpendicolare. All'incontro nelle poco elevate, grande bisogna che sia la forza dell'impeto orizzontale, che a poca altezza dee cacciar il projetto. Ma sebben io capisco benissimo che nella totale elevazione di gr. 90, per cacciar il projetto un sol dito lontano dal perpendicolo, non basta tutta la forza del mondo, ma necessariamente dee egli ricadere nell'istesso luogo, onde fu cacciato; non però con simil sicurezza ardirei di affermare, che anco nella nulla elevazione, cioè nella linea orizzontale, non potesse da qualche forza, benchè non infinita, esser in alcuna lontananza spinto il projetto; sì che, per esempio, nè anco una colubrina sia potente a spignere una palla di ferro orizzontalmente, come dicono, di punto bianco, cioè di punto niuno, che è dove non si dà elevazione. Io dico che in questo caso resto con qualche ambiguità: e che io non neghi risolutamente il fatto, mi ritiene un altro accidente, che par non meno strano, e pure ne ho la dimostrazione concludente necessariamente. E l'accidente è l'esser impossibile distendere una corda, sì che resti tesa dirittamente e parallela all'orizzonte, ma sempre fa sacca e si piega, nè vi è forza che basti a tenderla rettamente.

Salv. Adunque, Sig. Sagredo, in questo caso della corda cessa in voi la maraviglia circa la stravaganza dell'effetto,

perchè ne avete la dimostrazione. Ma se noi ben considereremo, forse troveremo qualche corrispondenza tra l'accidente del projetto e questo della corda. La curvità della linea del projetto orizzontale par che derivi dalle due forze, delle quali una (che è quella del projciente) lo caccia orizzontalmente, e l'altra (che è la propria gravità) lo tira in giù a piombo. Ma nel tender la corda vi sono le forze di coloro che orizzontalmente la tirano, e vi è ancora il peso dell'istessa corda che naturalmente inclina al basso. Son dunque queste due generazioni assai simili. E se voi date al peso della corda tanta possanza ed energia di poter contrastare e vincer qualsivoglia immensa forza che la voglia distendere dirittamente, perchè vorrete negarla al peso della palla? Ma più voglio dirvi, recandovi insieme maraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche, e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizzonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela all'orizzonte, farete pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete (allentando più o meno la detta catenuzza) incurvarsi questa e adattarsi alla medesima parabola; e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazioni sotto ai gr. 45, la catenella cammina quasi *ad unguem* sopra la parabola.

Sagr. Adunque con una tal catena sottilmente lavorata si potrebbero in un subito punteggiar molte linee paraboliche sopra una piana superficie.

Salv. Potrebbesi, ed ancora con qualche utilità non piccola, come appresso vi dirò.

Simp. Ma prima che passar più avanti, vorrei pur io ancora restar assicurato almeno di quella proposizione, della quale voi dite essercene dimostrazione necessariamente concludente; dico dell'esser impossibile per qualunque immensa forza fare star tesa una corda dirittamente ed equidistante all'orizzonte.

Sagr. Vedrò se mi sovviene della dimostrazione; per intelligenza della quale bisogna, Sig. Simplicio, che voi suppongbiate, per vero quello che in tutti gli strumenti meccanici, non solo con l'esperienza, ma con la dimostrazione ancora, si verifica; e questo è, che la velocità del movente, benchè di forza debole, può superare la resistenza, benchè grandissima, di un resistente che lentamente debba esser mosso, tuttavolta che maggior proporzione abbia la velocità del movente alla tardità del resistente, che non ha la resistenza di quel che debbe esser mosso alla forza del movente.

Simp. Questo mi è notissimo e dimostrato da Aristotile nelle sue quistioni meccaniche, e manifestamente si vede nella leva e nella stadera, dove il romano, che non pesi più di 4 libbre, leverà un peso di 400, mentre che la lontananza di esso romano dal centro, sopra il quale si volge la stadera, sia più di cento volte maggiore della distanza dal medesimo centro di quel punto, dal quale pende il gran peso: e questo avviene, perchè nel calar che fa il romano, passa spazio più di cento volte maggiore dello spazio, per lo quale nel medesimo tempo monta il gran peso. Che è l'istesso che dire, che il piccolo romano si muove con velocità più che cento volte maggiore della velocità del gran peso.

Sagr. Voi ottimamente discorrete, e non mettete dubbio alcuno nel concedere, che per piccola che sia la forza del movente, supererà qualsivoglia gran resistenza, tutta volta che quello più avanzi di velocità, che ei non cede di vigore e gravità. Or venghiamo al caso della corda. E segnando un poco di figura (*Fig.* 125) intendete per ora questa linea AB, passando sopra i due punti fissi e stabili A, B, aver nelle estremità sue pendenti, come vedete, due immensi pesi *eguali* C, D, li quali tirandola con grandissima forza la facciano star veramente tesa dirittamente, essendo essa una semplice linea senza veruna gravità. Or qui vi soggiungo e dico, che se dal mezzo di quella, che sia il punto E, voi sospenderete qualsivoglia piccolo peso, quale sia questo H, la linea AB cederà, ed inclinandosi verso il punto F, ed in conseguenza allungandosi, costrignerà i due gravissimi pesi C, D a salire in

alto: il che in tal guisa vi dimostro. Intorno ai due punti A, B, come centri, descrivo due quadranti EFG, ELM; ed essendo che li due semidiametri AI, BL sono eguali alli due AE, EB, gli avanzi FI, FL saranno le quantità degli allungamenti delle parti AF, FB sopra le AE, EB; ed in conseguenza determinano le salite dei pesi C, D, tutta volta però che il peso H avesse avuto facoltà di calare in F. Il che allora potrebbe seguire, quando la linea EF, che è la quantità della scesa di esso peso H, avesse maggior proporzione alla linea FI, che determina la salita dei due pesi C, D, che non ha la gravità di amendue essi pesi alla gravità del peso H. Ma questo necessariamente avverrà, sia pur quanto si voglia massima la gravità dei pesi C, D, e minima quella dell' H. Imperocchè non è sì grande l' eccesso dei pesi C, D sopra il peso H, che maggiore non possa essere a proporzione l' eccesso della tangente EF sopra la parte della segante FI. Il che proveremo così: Sia il cerchio, il cui diametro GI: e qual proporzione ha la gravità dei pesi C, D alla gravità di H, tale l' abbia la linea BO ad un' altra che sia C, della quale sia minore la D, sì che maggior proporzione avrà la BO alla D che alla C; prendasi delle due OB, D la terza proporzionale BE, e come OE ad EB, così si faccia il diametro GI (prolungandolo) all' IF, e dal termine F tirisi la tangente FN. E perchè si è fatto, come OE ad EB, così GI ad IF, sarà, componendo, come OB a BE, così GF ad FI. Ma tra OB e BE media la D, e tra GF, FI media la NF; adunque NF alla FI ha la medesima proporzione che la OB alla D, la qual proporzione è maggiore di quella dei pesi CD al peso H. Avendo dunque maggior proporzione la scesa o velocità del peso H alla salita o velocità dei pesi C, D, che non ha la gravità di essi pesi C, D alla gravità del peso H; resta manifesto che il peso H descenderà, cioè la linea AB partirà dalla rettitudine orizzontale. E quel che avviene alla retta AB priva di gravità, mentre si attacchi in E qualsivoglia minimo peso H, avviene all' istessa corda AB intesa di materia pesante, senza l'aggiunta di alcun altro grave; poichè vi si sospende il peso istesso della materia componente essa corda AB.

Simp. Io resto soddisfatto a pieno; però potrà il Sig. Salviati, conforme alla promessa, esplicarci qual sia l'utilità che da simile catenella si può ritrarre, e dopo questo arrecarci quelle speculazioni che dal nostro Accademico sono state fatte intorno alla forza della percossa.

Salv. Assai per questo giorno ci siamo occupati nelle contemplazioni passate: l'ora, che non poco è tarda, non ci basterebbe a gran segno per disbrigarci dalle nominate materie; però differiremo il congresso ad altro tempo più opportuno.

Sagr. Concorro col parere di V. S. perchè da diversi ragionamenti avuti con amici intrinseci del nostro Accademico ho ritratto, questa materia della forza della percossa essere oscurissima, nè di quella sin'ora essersi, da chiunque ne ha trattato, penetrato i suoi ricetti pieni di tenebre, ed alieni in tutto e per tutto dalle prime immaginazioni umane; e tra le conclusioni sentite profferire me ne resta in fantasia una stravagantissima, cioè, che la forza della percossa è indeterminata, per non dire infinita. Aspetteremo dunque la comodità del Sig. Salviati. Ma intanto dicami che materie son queste, che si vedono scritte dopo il trattato dei projetti?

Salv. Queste sono alcune proposizioni attenenti al centro di gravità dei solidi, le quali in sua gioventù andò ritrovando il nostro Accademico, parendogli che quello che in tal materia aveva scritto Federigo Comandino non mancasse di qualche imperfezione. Credette dunque con queste proposizioni, che qui vedete scritte, poter supplire a quello che si desiderava nel libro del Comandino, ed applicossi a questa contemplazione ad instanza dell'illustrissimo Sig. Marchese Guid' Ubaldo del Monte, grandissimo matematico de' suoi tempi, come le diverse sue opere pubblicate ne mostrano, ed a quel Signore ne dette copia con pensiero di andar seguitando cotal materia anco negli altri solidi non tocchi dal Comandino; ma incontratosi dopo alcun tempo nel libro del Sig. Luca Valerio, massimo geometra, e veduto come egli risolve tutta questa materia senza niente lasciare indietro, non seguitò più avanti, benchè le aggressioni sue siano per istrade molto diverse da quelle del Sig. Valerio.

Sagr. Sarà bene dunque che in questo tempo, che s'intermette tra i nostri passati ed i futuri congressi, V. S. mi lasci nelle mani il libro, che io tra tanto anderò vedendo e studiando le proposizioni conseguentemente scrittevi.

Salv. Molto volentieri eseguisco la vostra domanda, e spero che V. S. prenderà gusto di tali proposizioni.

APPENDIX,

In qua continentur theoremata, eorumque demonstrationes, quae ab eodem Auctore circa centrum gravitatis solidorum olim conscripta fuerunt.

POSTULATUM.

Petimus aequalium ponderum similiter in diversis libris dispositorum, si horum quidem compositorum centrum gravitatis libram secundum aliquam rationem diviserit, et illorum etiam gravitatis centrum libram secundum eandem rationem dividere.

Lemma I.

Sit linea AB (*Fig.* 126) bifariam in C secta, cujus medietas AC divisa sit in E, ita ut quam rationem habet BE ad EA, hanc habeat AE ad EC. Dico, BE ipsius EA duplam esse. Quia enim ut BE ad EA, ita EA ad EC, erit componendo et permutando, ut BA ad AC, ita AE ad EC; est autem ut AE ad EC, nempe ut BA ad AC, ita BE ad EA, quare BE ipsius EA dupla est.

Propositio I.

His positis demonstratur, si magnitudines quotcunque sese aequaliter excedentes, et quarum excessus earum minimae sint aequales, ita in libra disponantur, ut ex distantiis aequalibus pendeant, centrum gravitatis omnium libram ita dividere, ut pars versus minores reliquae sit dupla.

In libra itaque AB (*Fig.* 127) ex distantiis aequalibus pendeant quotcunque numero magnitudines F, G, H, K, N, quales dictum est, quarum minima sit N; sintque puncta suspensionum A, C, D, E, B, sitque omnium magnitudinum sic dispositarum gravitatis centrum X. Ostendendum est partem librae BX versus minores magnitudines reliquam XA duplam esse.

Dividatur libra bifariam in puncto D, quod vel in aliquo puncto suspensionum, vel in duarum suspensionum medio cadet necessario; reliquae verò suspensionum distantiae, quae inter A et D intercipiuntur, omnes bifariam dividantur punctis M, I; magnitudines deinde omnes in partes ipsi N aequales dividantur: erunt jam partes ipsius F tot numero, quot sunt, quae ex libra pendent magnitudines; partes vero ipsius G erunt una pauciores, et sic de reliquis. Sint itaque ipsius F partes N, O, Y, S, T, ipsius G vero N, O, Y, S, ipsius H quoque N, O, Y, ipsius denique K sint N, O; eruntque magnitudines omnes, in quibus N ipsi F aequatur; magnitudines vero omnes, in quibus O ipsi G aequatur; et magnitudines in quibus Y ipsi H; illae autem, in quibus S ipsi K, et magnitudo T ipsi N aequalis est. Quia igitur magnitudines omnes, in quibus N inter se sunt aequales, aeque ponderabunt in signo D, quod libram AB bifariam dividit, et eandem ob causam omnes magnitudines, in quibus O aeque ponderant in I, illae autem, in quibus Y in C, et in quibus S in M, aeque ponderant; T autem in A suspenditur. Sunt igitur in libra AD, ex distantiis aequalibus D, I, C, M, A suspensae magnitudines sese aequaliter excedentes, et quarum excessus minimae aequatur: maxima autem quae est composita ex omnibus N, pendet ex D; minima, quae est T, pendet ex A, et reliquae ordinate dispositae sunt. Estque rursus alia libra AB; in qua magnitudines aliae predictis numero et magnitudine aequales eodem ordine dispositae sunt. Quare librae AB, AD a centris omnium magnitudinum secundum eandem rationem dividentur. Est autem centrum gravitatis dictarum magnitudinum, *tam in libra AB quam in libra DA similiter dispositarum* idem punctum, nempe X, *cum praedictae*

magnitudines non moveantur, sed tantum respectu librarum AB, DA inverso ordine considerentur dispositae: quare X dividit libras BA, AD sub eadem ratione: ita ut sicut BX ad XA, ita XA ad XD; quare BX dupla est ipsius XA ex lemmate supra posito. Quod erat probandum.

PROPOSITIO II.

Si conoidi parabolico figura inscribatur, et altera circumscribatur ex cylindris aequalem altitudinem habentibus, et axis dicti conoidis dividatur, ita ut pars ad verticem partis ad basin sit dupla: centrum gravitatis inscriptae figurae basi portionis dicto puncto divisionis erit propinquius: centrum autem gravitatis circumscriptae a basi conoidis eodem puncto erit remotius; eritque utrorumque centrorum a tali puncto distantia aequalis lineae, quae sit pars sexta altitudinis unius cylindri, ex quibus figurae constant.

Sit itaque conoidale parabolicum (*Fig.* 128), et figurae, quales dictae sunt, altera sit inscripta, altera circumscripta, et axis conoidis, qui sit AE, dividatur in N, ita ut AN ipsius NE sit dupla. Ostendendum est, centrum gravitatis inscriptae figurae esse in linea NE, circumscriptae autem centrum esse in AN. Secentur figurae ita dispositae plano per axem, et sit sectio parabolae BAC; plani autem secantis, et basis conoidis sectio sit BC linea; cylindrorum autem sectiones sint rectangulae figurae: ut in descriptione apparet: primus itaque cylindrus inscriptorum, cujus axis est DE, ad cylindrum, cujus axis est DY, eandem habet rationem quam quadratum OD ad quadratum SY, hoc est, quam DA ad AY: cylindrus autem cujus axis est DY ad cylindrum YZ est ut SY ad RZ potentia; hoc est ut YA ad AZ, et eadem ratione cylindrus, cujus axis est ZY, ad eum, cujus axis est ZV, est ut ZA ad AV, dicti itaque cylindri sunt inter se ut lineae DA, AY; ZA, AV: istae autem sunt sese aequaliter excedentes, et est excessus aequalis minimae, ita ut AZ dupla sit ad AV; AY autem ejusdem est tripla, et DA quadrupla; sunt igitur dicti cylindri magnitudines quaedam sese ad invicem aequaliter excedentes, quarum excessus aequantur earum minimae, et est

linea XM, in qua ex distantiis aequalibus suspensae sunt (unumquodque enim cylindrorum centrum gravitatis habet in medio axis); quare, per ea quae superius demonstrata sunt, centrum gravitatis magnitudinis ex omnibus compositae dividet lineam XM, ita ut pars ad X reliquae sit dupla. Dividatur itaque, et sit $X\alpha$ ipsius αM dupla; est ergo α centrum gravitatis inscriptae figurae. Dividatur AV bifariam in ι; erit ιX dupla ipsius ME; est autem $X\alpha$ dupla ipsius αM; quare ιE tripla erit $E\alpha$; est autem AE tripla ipsius EN: constat ergo, EN majorem esse quam $E\alpha$, et ideo α, quod est centrum figurae inscriptae, magis accedere ad basin conoidis quam N, et quia est ut AE ad EN, ita ablatum ιE ad ablatum $E\alpha$; erit et reliquum ad reliquum, idest $A\iota$ ad $N\alpha$, ut AE ad EN. Est ergo αN tertia pars ipsius $A\iota$, et sexta ipsius AV. Eodem autem pacto cylindri circumscriptae figurae demonstrabuntur esse sese aequaliter excedentes, et esse excessus aequales minimo, et habere in linea ιM centra gravitatum in distantiis aequalibus. Si itaque dividatur ιM in π, ita ut $\iota\pi$ reliquae πM sit dupla; erit π centrum gravitatis totius circumscriptae magnitudinis; et cum $\iota\pi$ dupla sit ad πM; $A\iota$ autem minor sit quam dupla ad EM (cum ei sit aequalis); erit tota AE minor quam tripla ipsius $E\pi$; quare $E\pi$ major erit ipsa EN; et cum ιM tripla sit ad $M\pi$, et ME cum duabus ιA similiter tripla sit ad ME; erit tota AE cum $A\iota$ tripla ad $E\pi$; est autem AE tripla ad EN; quare reliqua $A\iota$ reliquae πN tripla erit. Est igitur $N\pi$ sexta pars ipsius AV. Haec autem sunt, quae demonstranda fuerunt.

Corollarium.

Ex his manifestum est, posse conoidi parabolico figuram inscribi, et alteram circumscribi, ita ut centra gravitatum earum a puncto N minus quacunque proposita linea distent. Si enim sumatur linea propositae lineae sexcupla, fiantque cylindrorum axes, ex quibus figurae componuntur hac sumpta linea minores; erunt quae inter harum figurarum centra gravitatum, et signum N cadunt, lineae proposita linea minores.

ALITER IDEM.

Axis conoidis, qui sit CD (*Fig.* 129), dividatur in O, ita ut CO ipsius OD sit dupla. Ostendendum est, centrum gravitatis inscriptae figurae esse in linea OD; circumscriptae vero centrum esse in CO. Secentur figurae plano per axem et C, ut dictum est. Quia igitur cylindri SN, TM, VI, XE sunt inter se ut quadrata linearum SD, TN, VM, XI; haec autem sunt inter se ut lineae NC, CM, CI, CE; hae autem sunt sese aequaliter excedentes, et excessus aequantur minimae, nempe CE; estque cylindrus TM cylindro QN aequalis; cylindrus autem VI ipsi PN, et XE ipsi LN aequatur; ergo cylindri SN, QN, PN, LN sunt sese aequaliter excedentes, et excessus aequantur minimo eorum, nempe cylindro LN. Est autem excessus cylindri SN super cylindrum QN anulus, cujus altitudo est QT, hoc est ND; latitudo autem SQ: excessus autem cylindri QN super PN est anulus, cujus latitudo est QP, excessus autem cylindri PN super LN est anulus, cujus latitudo PL. Quare dicti anuli SQ, QP, PL sunt inter se aequales et cylindro LN. Anulus igitur ST aequatur cylindro XE; anulus QV, qui ipsius est duplus, aequatur cylindro VI, qui similiter cylindri XE duplus est, et eandem ob causam anulus PX cylindro TM, et cylindrus LE cylindro SN aequalis erit. In libra itaque KF puncta media rectarum EI, DN connectente, et in partes aequales punctis H, G secta, sunt magnitudines quaedam, nempe cylindri SN, TM, VI, XE, et gravitatis centrum primi cylindri est K; secundi vero est H; tertii G; quarti F. Habemus autem et aliam libram MK, quae est ipsius FK dimidia, totidemque punctis in partes aequas distributa, nempe MH, HN, NK, et in ea aliae magnitudines illis, quae sunt in libra FK, numero et magnitudine aequales, et centra gravitatum in signis M, H, N, K habentes, et eodem ordine dispositae sunt: cylindrus enim LE centrum gravitatis habet in M, et aequatur cylindro SN centrum habenti in K: anulus vero PX centrum habet H, et aequatur cylindro TM, cujus centrum est H, et anulus QV, centrum habens N, aequatur cylindro VI, cujus centrum est G; et de-

nique anulus ST, centrum habens K, aequatur cylindro XE, cujus centrum est F. Igitur centrum gravitatis dictarum magnitudinum libram dividet in eadem ratione: earundem vero unum est centrum, ac propterea punctum aliquod utrique librae commune, quod sit Y. Itaque FY ad YK erit ut KY ad YM; est ergo FY dupla ipsius YK; et divisa CE bifariam in Z, erit ZF dupla ipsius KD; ac propterea ZD tripla ipsius DY; rectae vero DO tripla est CD: major est ergo recta DO, quam DY; ac propterea Y centrum inscriptae magis ad basim accedit, quam punctum O. Et quia, ut CD ad DO, ita est ablatum ZD ad ablatum DY; erit et reliquum CZ ad reliquum YO, ut CD ad DO; nempe YO tertia pars erit ipsius CZ, hoc est pars sexta ipsius CE. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, cylindros circumscriptae figurae sese aequaliter excedere, et esse excessus aequales minimo, et ipsorum centra gravitatum in distantiis aequalibus librae KZ constituta, et pariter anulos iisdem cylindris aequales similiter disponi in altera libra KG ipsius KZ dimidia, ac propterea circumscriptae gravitatis centrum, quod sit R, libras ita dividere, ut ZR ad RK sit ut KR ad RG. Erit ergo ZR dupla ipsius RK; CZ vero rectae KD aequalis est, et non dupla; erit tota CD minor quam tripla ipsius DR; quare recta DR major est quam DO, scilicet centrum circumscriptae a basi magis recedit quam punctum O. Et quia ZK tripla est ad KR, et KD cum duabus ZC tripla ad KD; erit tota CD cum CZ tripla ipsius DR; est autem CD tripla ad DO, quare reliqua CZ reliquae RO tripla erit; scilicet OR sexta pars est ipsius EC. Qnod est propositum.

Propositio III.

His autem praedemonstratis, demonstratur, centrum gravitatis parabolici conoidis axem ita dividere, ut pars ad verticem aliquae ad basim sit dupla.

Esto parabolicum conoidale (*Fig.* 130), cujus axis sit AB divisus in N, ita ut AN ipsius NB sit dupla. Ostendendum est, centrum gravitatis conoidis esse N punctum; si enim non est N, aut infra ipsum, aut supra ipsum erit. Sit primum

infra, sitque X, et exponatur linea LO ipsi NX aequalis, et LO contingenter dividatur in S, et quam rationem habet utraque simul BX, OS ad OS, hanc habeat conoidale ad solidum Y, et inscribatur conoidi figura ex cylindris aequalem altitudinem habentibus, ita ut, quae inter illius centrum gravitatis et punctum N intercipitur, minor sit quam LS, excessus autem, quo a conoide superatur, minor sit solido Y: hoc autem fieri posse, clarum est. Sit itaque inscripta, cujus gravitatis centrum sit I: erit jam IX major SO: et quia est, ut XB cum SO ad SO, ita conoidale ad Y (est autem Y majus excessu quo conoidale figuram inscriptam superat), erit conoidalis ad dictum excessum proportio major quam utriusque BX, OS, ad SO; et dividendo, figura inscripta ad dictum excessum majorem rationem habebit quam BX ad SO: habet autem BX ad XI proportionem adhuc minorem quam ad SO: inscripta igitur figura ad reliquas portiones multo majorem proportionem habebit quam BX ad XI: quam igitur proportionem habet inscripta figura ad reliquas portiones, alia quaedam linea habebit ad XI; quae necessario major erit quam BX. Sit igitur MX. Habemus itaque centrum gravitatis conoidis X: figurae autem in ipso inscriptae centrum gravitatis est I, reliquarum ergo portionum quibus conoidale inscriptam figuram excedit gravitatis centrum erit in linea XM, atque in eo ipsius puncto in quo sic terminata fuerit ut, quam proportionem habet inscripta figura ad excessum, quo a conoide superatur, eandem ipsam habeat ad XI. Ostensum autem est, hanc proportionem esse illam quam habet MX ac XI: erit ergo M gravitatis centrum earum portionum, quibus conoidale excedit inscriptam figuram, quod certe esse non potest; nam si per M ducatur planum basi conoidis aequidistans, erunt omnes dictae portiones versus eandem partem, nec ab eo dividentur. Non est igitur gravitatis centrum ipsius conoidis infra punctum N. Sed neque supra. Sit enim, si fieri potest, H, et rursus, ut supra, exponatur linea LO aequalis ipsi HN, et contingenter divisa in S: et quam proportionem habet utraque simul BN, SO ad SL, hanc habeat conoidale ad Y, et conoidali circumscribatur figura ex cylindris, ut dictum est, a qua minori quanti-

tate excedatur, quam sit solidum Y, et linea inter centrum gravitatis circumscriptae et signum N sit minor quam SO: erit residua VH major quam LS; et quia est, ut utraque BN, OS ad SL, ita conoidale ad Y (est autem Y majus excessu, quo conoidale a circumscripta superatur); ergo BN, SO ad SL minorem rationem habet quam conoidale ad dictum excessum. Est autem BN minor quam utraque BN, SO: VH autem major quam SL: multo igitur majorem rationem habet conoidale ad dictas portiones quam BV ad VH. Quam igitur rationem habet conoidale ad easdem portiones, hanc habebit ad VH linea major ipsa BV. Habeat; sitque ea MV, et quia centrum gravitatis circumscriptae figurae est V, centrum vero conoidis est H, atque est, ut conoidale ad residuas portiones, ita MV ad VH, erit M centrum gravitatis residuarum portionum: quod similiter est impossibile. Non est ergo centrum gravitatis conoidis supra punctum N. Sed demonstratum est quod neque infra; restat ergo, ut in ipso N sit necessario. Et eadem ratione demonstrabitur de conoide plano super axe non erecto secto. Aliter idem, ut constat in sequenti, centrum gravitatis conoidis parabolici inter centrum circumscriptae figurae et centrum inscriptae cadit.

Sit conoidale (*Fig.* 131) cujus axis AB, et centrum circumscriptae sit C, inscriptae vero sit O. Dico, centrum conoidis inter C, O puncta esse; nam si non, infra vel supra, vel in altero eorum erit. Sit infra, ut in R; et quia R est centrum gravitatis totius conoidis, inscriptae autem figurae est gravitatis centrum O: reliquarum ergo portionum, quibus inscripta figura a conoide superatur, centrum gravitatis erit in linea OR ad partes R extensa, atque in eo puncto, in quo sic terminatur, ut quam rationem habent dictae portiones ad inscriptam, eandem habeat OR ad lineam inter R et punctum illud cadentem. Sit haec ratio illa, quam habet OR ad RX. Aut igitur X cadet extra conoidem, aut intra, aut in ipsi basi. Si vel extra, vel in basi cadat, jam manifestum est absurdum. Cadat intra, et quia XR ad RO est ut inscripta figura ad excessum, quo a conoide superatur, rationem illam, quam habet BR ad RO, eandem habeat inscripta figura ad solidum H, quod

necessario minus erit dicto excessu. Et inscribatur alia figura, quae a conoide superatur minori quantitate quam sit H, cujus gravitatis centrum cadet intra OC. Sit V. Et quia prima figura ad H est ut BR ad RO; secunda autem figura, cujus centrum V, major est prima, et a conoide exceditur minori quantitate quam sit H; quam rationem habet secunda figura ad excessum, quo a conoide superatur, hanc habebit ad RU linea major ipsa BR. Est autem R centrum gravitatis conoidis: inscriptae autem secundae V: centrum ergo reliquarum portionum erit extra conoides infra B, quod est impossibile. Et eodem pacto demonstrabitur, centrum gravitatis ejusdem conoidis non esse in linea CA. Quod autem non sit alterum punctorum C, O, manifestum est. Si enim dicas esse, descriptis aliis figuris, inscripta quidem majori illa, cujus centrum O, circumscripta vero minor ea, cujus centrum C, centrum conoidis extra harum figurarum centrum caderet, quod nuper impossibile esse conclusum est. Restat ergo, ut inter centrum circumscriptae et inscriptae figurae sit. Quod si ita est, necessario erit in signo illo, quod axem dividit ut pars ad verticem reliquae sit dupla, cum enim circumscribi et inscribi possint figurae, ita ut quae inter ipsarum centrum et dictum signum cadunt lineae, quacunque linea sint minores, aliter dicentem ad impossibile deduceremus, quod scilicet centrum conoidis non intra inscriptae et circumscriptae centra caderet.

Lemma II.

Si fuerint tres lineae proportionales, et quam proportionem habet minima ad excessum, quo maxima minimam superat, eandem habeat linea quaedam sumpta ad duas tertias excessus, quo maxima mediam superat; et item quam propornem habet composita ex maxima et dupla mediae ad compositam ex tripla maximae et mediae, eandem habuerit alia linea sumpta ad excessum quo maxima mediam excedit; erunt ambae lineae sumptae simul, tertia pars maximae proportionalium.

Sint tres lineae proportionales AB, BC, BF (*Fig.* 132), et quam proportionem habet BF ad FA, hanc habeat MS ad duas

tertias ipsius CA; quam vero proportionem habet composita ex AB et dupla BC ad compositam ex tripla utriusque AB, BC, eandem habeat alia, nempe SN ad AC. Demonstrandum est, MN tertiam esse partem ipsius AB. Quia itaque AB, BC, BF sunt proportionales, erunt etiam AC, CF in eadem ratione; est igitur, ut AB ad BC, ita AC ad CF, et ut tripla AB ad triplam BC, ita AC ad CF. Quam itaque rationem abet tripla AB cum tripla BC ad triplam AB, hanc habebit AC ad lineam minorem ipsa CF. Sit illa CO. Quare componendo, et per conversionem proportionis, OA ad AC eandem habebit rationem, quam tripla AB cum sexcupla BC ad triplam AB cum tripla BC; habet autem AC ad SN eandem rationem, quam tripla AB cum tripla BC ad AB cum dupla BC; ex aequali igitur OA ad NS eandem habebit rationem, quam tripla AB cum sexcupla BC ad AB cum dupla BC; verum tripla AB cum sexcupla BC triplae sunt ad AB cum dupla BC; ergo AO tripla est ad SN.

Rursus quia OC ad CA est ut tripla CB ad triplam AB cum tripla CB; est autem, sicut CA ad CF, ita tripla AB ad triplam BC; ex aequali ergo in proportione perturbata, ut OC ad CF, ita erit tripla AB ad triplam AB cum tripla BC: et per conversionem rationis, ut OF ad FC, sic tripla BC ad triplam AB cum tripla BC: est autem, sicut CF ad FB, ita AC ad CB, et tripla AC ad triplam BC; ex aequali igitur, in proportione perturbata, ut OF ad FB ita tripla AC ad triplam utriusque simul AB, BC. Tota igitur OB ad BF erit ut sexcupla AB ad triplam utriusque AB, BC; et quia FC, CA in eadem sunt ratione ac CB, BA, erit sicut FC ad CA ita BC ad BA; et componendo, ut FA ad AC, ita utraque BA, BC ad BA, et sic tripla ad triplam: ergo ut FA ad AC, ita composita ex tripla BA et tripla BC ad triplam AB: quare sicut FA ad duas tertias ipsius AC, sic composita ex tripla BA et tripla BC ad duas tertias triplae BA: hoc est, ad duplam BA. Sed sicut FA ad duas tertias ipsius AC, ita FB ad MS; sicut ergo FB ad MS, ita composita ex tripla BA et tripla BC ad duplam BA; verum sicut OB ad FB, ita erat sexcupla AB ad triplam utriusque AB, BC; ergo ex aequali, OB ad MS

eandem habebit rationem quam sexcupla AB ad duplam BA; quare MS erit tertia pars ipsius OB. Et demonstratum est SN tertiam esse partem ipsius AO, constat ergo, MN ipsius AB tertiam similiter esse partem, et hoc est, quod demonstrandum fuit.

PROPOSITIO IV.

Cujuslibet frusti a conoide parabolico abscissi centrum gravitatis est in linea recta, quae frusti est axis; qua in tres aequas partes divisa, centrum gravitatis in media existit, eamque sic dividit, ut pars versus minorem basim ad partem versus majorem basim, eandem habeat rationem quam major basis ad basim minorem.

A conoide, cujus axis RB (*Fig.* 133), abscissum sit solidum, cujus axis BE, et planum abscindens sit basi aequidistans; secetur autem altero plano per axem super basin erectum, sitque sectio parabolae V, R, C; hujus autem, et plani secantis et basis sectiones sint lineae rectae LM, VC; erit RB diameter proportionis, vel diametro aequidistans; LM, VC erunt ordinatim applicatae. Dividatur itaque EB in tres partes aequales; quarum media sit QY; haec autem signo I ita dividatur, ut, quam rationem habet basis, cujus diameter VC, ad basin, cujus diameter LM; hoc est, quam habet quadratum VC ad quadratum LM, eandem habeat QI ad IY. Demonstrandum est, I centrum gravitatis esse frusti LMC. Exponatur linea NS aequalis ipsi BR, et SX aequalis sit ER, ipsarum autem NS, SX sumatur tertia proportionalis SG, et quam proportionem habet NG ad GS, hanc habeat linea BQ ad IO. Nihil autem refert, si punctum O supra vel infra LM cadat; et quia in sectione VRC lineae LM, VC ordinatim sunt applicatae, erit ut quadratum VC ad quadratum LM, ita linea BR ad RE; est autem ut quadratum VC ad quadratum LM, ita QI ad IY, et ut BR ad RE, ita NS ad SX, ergo QI ad IY est ut NS ad SX. Quare ut QY ad YI, ita erit utraque NS, SX ad SX, et ut EB ad YI, ita composita ex tripla NS et tripla SX ad SX; est autem, ut EB ad BY, ita composita ex tripla utriusque simul NS, SX ad compositam

ex NS, SX; ergo ut EB ad BI, ita composita ex tripla NS et tripla SX ad compositam ex NS et dupla SX; sunt igitur tres lineae proportionales, NS, SX, GS, et quam proportionem habet SG ad GN, hanc habet quaedam sumpta OI ad duas tertias ipsius EB, hoc est ipsius NX. Quam autem proportionem composita ex NS et dupla SX, ad compositam ex tripla NS et tripla SX, eandem habet alia quaedam sumpta IB ad BE, hoc est ad NX; per ea igitur, quae supra demonstrata sunt, erunt lineae illae simul sumptae tertia pars ipsius NS, hoc est ipsius RB: est ergo RB tripla ipsius BO, quare O erit centrum gravitatis conoidis VRC. Sit autem A centrum gravitatis conoidis LRM; frusti ergo VLMC centrum gravitatis est in linea OB, atque in eo puncto, qui illam sic terminat, ut quam rationem habet VLMC frustum ad LRM portionem, eam habeat linea AO ad eam, quae inter O et dictum punctum intercedit. Et quia RO est duae tertiae ipsius RB; RA vero duae tertiae ipsius RE; erit reliqua AO duae tertiae reliquae EB; et quia est, ut frustum VLMC ad portionem LRM, ita NG ad GS; ut autem NG ad GS, ita duae tertiae EB ad OI; duabus autem tertiis ipsius EB aequalis est linea AO; erit ut frustum VLMC ad portionem LRM, ita AO ad OI. Constat igitur frusti VLMC gravitatis centrum esse punctum I, et axem ita dividere, ut pars versus minorem basin ad partem versus majorem sit ut dupla majoris basis una cum minori ad duplam minoris una cum majori. Quod est propositum, elegantius explicatum.

PROPOSITIO V.

Si magnitudines quotcunque ita inter se sint dispositae, ut secunda addat super primam duplum primae, tertia addat super secundam triplum primae, quarta vero addat super tertiam quadruplum primae, et si unaquaeque sequentium super sibi proximam addat magnitudinem primae, multiplicem secundum numerum, quem ipsa in ordine retinuerit: si, inquam, hae magnitudines ordinatim in libra ex distantiis aequalibus suspendantur: centrum aequilibrii omnium compositarum libram ita dividet, ut pars versus minores magnitudines reliquae sit tripla.

Esto libra LT (*Fig.* 134), et magnitudines, quales dictum est, in ea pendeant, et sint A, F, G, H, K, quarum A ex T suspensa sit prima. Dico, centrum aequilibrii libram TL ita secare, ut pars versus T reliquae sit tripla. Sit TL tripla ad LI, et SL tripla LP, et QL ipsius LN, et LP ipsius LO; erunt IP, PN, NO, OL aequales. Et accipiatur in F magnitudo ipsius A dupla, in G vero alia ejusdem tripla, in H ejusdem quadrupla, et sic deinceps, et sint sumptae magnitudines illae, in quibus A, et idem fiat in magnitudinibus F, G, H, K. Quum enim in F reliqua magnitudo, nempe B, sit aequalis A, sumatur in G ipsius dupla, in H tripla etc., et sint hae magnitudines sumptae, in quibus B; et eodem pacto sumantur illae, in quibus C, et in quibus D et E; erunt jam omnes, in quibus A, aequales ipsi K; composita vero ex omnibus B aequabitur ipsi H; composita ex C ipsi G; ex omnibus D vero composita aequabitur F; et E ipsi A: et quia TI dupla est IL, erit I punctum aequilibrii magnitudinis compositae ex omnibus A; et similiter, cum SP ipsius PL sit dupla, erit P punctum aequilibrii compositae ex omnibus B, et eandem ob causam N erit punctum aequilibrii compositae ex omnibus C; O vero compositae ex D, et L ipsius E. Est igitur libra quaedam TL, in qua ex distantiis aequalibus pendent magnitudines quaedam K, H, G, F, A, et rursus est alia libra LI, in qua ex distantiis similiter aequalibus pendent totidem numero magnitudines, et eodem ordine praedictis aequales, est enim composita ex omnibus A, quae pendet ex I, aequalis K pendenti ex L, et composita ex omnibus B, quae pendet ex P, aequalis H pendenti ex P; et similiter composita ex C, quae pendet ex N, aequatur G, et composita ex D, quae pendet ex O, aequatur F, et E pendens ex L aequalis est A. Quare librae eadem ratione a centro compositarum magnitudinum dividentur. Unum est autem centrum compositae ex dictis magnitudinibus. Erit ergo punctum commune rectae TL; et rectae LI centrum, quod sit X. Itaque ut TX ad XL, ita erit LX ad XI, et tota TL ad LI, est autem TL ipsius LI tripla, quare et TX ipsius XL tripla erit.

PROPOSITIO VI.

Si magnitudines quotcunque ita sumantur, ut secunda addat super primam triplum primae, tertia vero super secundam addat quintuplum primae, quarta autem super tertiam addat septuplum primae, et sic deinceps uniscujusque augmentum super sibi proximam procedat, multiplex primae magnitudinis secundum numeros consequenter impares, siculi procedunt quadrata linearum sese aequaliter excedentium, quarum excessus minimae sit aequalis, et in libra ex distantiis aequalibus suspendantur; omnium compositarum centrum aequilibrii libram dividet, ut pars versus minores magnitudines reliquae sit major quam tripla, eadem vero dempta una distantia ejusdem minor sit quam tripla.

Sint in libra BE (*Fig.* 135) magnitudines, quales dictum est, a quibus auferantur magnitudines aliquae inter se, ut quae in praecedenti dispositae fuerunt; et sint compositae ex omnibus A, erunt reliquae, in quibus C, eodem ordine distributae, sed deficientes maxima. Sit ED tripla DB et GF tripla FB; erit D centrum aequilibrii compositae ex omnibus A; F vero compositae ex omnibus C; quare compositae ex omnibus A, C, centrum cadet inter D et F. Sit O. Manifestum itaque est EO ipsius OB majorem esse quam triplam; GO vero ejusdem OB minorem esse quam triplam. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VII.

Si cuicumque cono, vel coni portioni, ex cylindris aequalem altitudinem habentibus figura una inscribatur, et altera circumscribatur; itemque axis ejus ita dividatur, ut pars, quae inter punctum divisionis et verticem intercipitur, reliquae sit tripla: erit inscriptae figurae gravitatis centrum propinquius basi coni, quam punctum illud divisionis; circumscriptae vero centrum gravitatis eodem puncto erit vertici propinquius.

Sit itaque conus (*Fig.* 136), cujus axis NM dividatur in S, ita ut NS reliquae SM sit tripla. Dico, cujuscumque figurae cono, ut dictum est, inscriptae centrum gravitatis in axe

NM consistere, et ad basin coni magis accedere quam S punctum, circumscriptae vero gravitatis centrum similiter in axe NM esse, et vertici propinquius quam sit S. Intelligatur itaque inscripta figura ex cylindris, quorum axes MC, CB, BE, EA aequales sint. Primus itaque cylindrus, cujus axis MC, ad cylindrum, cujus axis CB, eandem habet rationem quam sua basis ad basin alterius (sunt enim eorum altitudines aequales); haec autem ratio eadem est ei, quam habet quadratum CN ad quadratum NB. Et similiter ostendetur, cylindrum, cujus axis CB, ad cylindrum, cujus axis BE, eandem habere rationem quam quadratum BN ad quadratum NE, cilindrum vero, cujus axis BE, ad cylindrum circa axem EA, eam, quam abet quadratum EN ad quadratum NA; sunt autem lineae NC, NB, NE, NA sese aequaliter excedentes, et earum excessus aequantur minimae, nempe ipsi NA. Sunt igitur magnitudines quaedam, nempe inscripti cylindri, eam inter se consequenter rationem habentes, quam quadrata linearum sese aequaliter excedentium, et quarum excessus minimae aequatur: suntque ita dispositi in libra TI, ut singulorum centra gravitatum in ea, et in distantiis aequalibus consistant. Per ea igitur, quae supra demonstrata sunt, constat, gravitatis centrum omnium ita compositorum libram TI ita dividere, ut pars versus T sit major quam tripla reliquae. Sit hoc centrum O; est ergo TO major quam tripla ipsius OI. Verum TN tripla est ad IM; ergo tota MO minor erit quam pars quarta totius MN, cujus MS pars quarta posita est. Constat ergo, signum O basi coni magis accedere quam S. Verum sit jam circumscripta figura constans ex cylindris, quorum axes MC, CB, BE, EA, AN inter se sint aequales; similiter, ut de inscriptis, ostendetur, esse inter se sicut quadrata linearum MN, NC, BN, NE, AN, quae sese aequaliter excedunt, excessusque aequatur minimae AN; quare per praemissam, centrum gravitatis omnium cylindrorum ita dispositorum, quod sit V, libram RI sic dividet, ut pars versus R, nempe RV, reliquae VI sit major quam tripla; TV vero ejusdem minor erit quam tripla. Sed NT tripla est ipsius IM; igitur tota VM major est quam pars quarta totius MN, cujus MS

pars quarta posita est. Itaque punctum V vertici propinquius est quam punctum S. Quod ostendendum erat.

PROPOSITIO VIII.

Cono dato potest figura circumscribi, et altera inscribi ex cylindris aequalem altitudinem habentibus, ita ut linea, quae inter centrum gravitatis circumscriptae, et centrum gravitatis inscriptae intercipitur, minor sit quacumque linea proposita.

Sit datus conus (*Fig.* 137), cujus axis AB, data autem recta sit K. Dico; exponatur cylindrus L aequalis ei, qui in cono inscribitur, altitudinem habens dimidium axis AB, et AB dividatur in C, ita ut AC ipsius CB tripla sit, et quam rationem habet AC ad K, hanc habeat cylindrus L ad solidum X. Cono autem circumscribatur figura ex cylindris aequalem altitudinem habentibus, et altera inscribatur, ita ut circumscripta excedat inscriptam minori quantitate, quam sit solidum X; sitque circumscriptae gravitatis centrum E, quod cadet supra C; inscriptae vero centrum sit S, cadens sub C. Dico jam, ES lineam ipsa K minorem esse. Nam si non; ponatur ipsi CA aequalis EO: quia igitur OE ad K eandem habet rationem quam L ad X, inscripta vero figura minor non est cylindro L; excessus autem, quo dicta figura a circumscripta superatur, minor est solido X; inscripta igitur figura ad dictum excessum majorem rationem habebit quam OE ad K; ratio autem OE ad K non est minor ea, quam habet OE ad ES, cum ES non ponatur minor K. Igitur inscripta figura ad excessum, quo a circumscripta superatur, majorem habet rationem quam OE ad ES. Quam igitur rationem habet inscripta ad dictum excessum, hanc habebit ad lineam ES linea quaedam major ipsa EO; sit illa ER; est autem inscriptae figurae centrum gravitatis S; circumscriptae vero centrum est E: constat ergo reliquarum portionum, quibus circumscripta excedit inscriptam, centrum gravitatis esse in linea RE, atque in eo puncto, a quo sic terminatur, ut quam rationem habet inscripta ad dictas portiones, eandem habeat linea inter E et punctum illud intercepta ad lineam ES; hanc vero rationem habet RE ad ES; ergo reliquarum portionum, quibus circum-

scripta superat inscriptam figuram, gravitatis centrum erit R, quod est impossibile, planum enim ductum per R basi coni aequidistans dictas portiones non secat. Falsum igitur est, lineam ES non esse minorem ipsa K; erit ergo minor. Haec autem non dissimili modo in pyramide fieri posse demonstrabuntur.

Corollarium.

Ex his manifestum est, cono dato posse figuram unam circumscribi, et alteram inscribi, ex cylindris aequalem altitudinem habentibus, ita ut lineae, quae inter earum centra gravitatum, et punctum, quod axem coni ita dividit, ut pars ad verticem reliquae sit tripla, intercipiuntur, quacunque data linea sint minores. Cum enim, ut demonstratum est, dictum punctum axem dividens, ut dictum est, semper inter circumscriptae et inscriptae gravitatum centra reperiatur; fierique possit, ut quae inter eadem centra mediat, linea minor sit quacunque linea proposita; multo minor eadem proposita linea sit, quae inter alterum centrorum, et dictum punctum axem dividens intercipitur.

Propositio IX.

Cujuslibet coni, vel pyramidis centrum gravitatis axem dividit, ut pars ad verticem reliquae ad basin sit tripla.

Esto conus (*Fig.* 138), cujus axis AB, et in C dividatur, ita ut AC reliquae CB sit tripla: ostendendum est, C esse gravitatis centrum coni. Nam si non est, erit coni centrum aut supra, aut infra punctum C. Sit prius infra; et sit E: et exponatur linea SP aequalis CE, quae contingenter dividatur in N; et quam rationem habet utraque simul BE, PN ad PN, hanc habeat conus ad solidum X, et inscribatur cono solida figura ex cylindris aequalem altitudinem habentibus, cujus centrum gravitatis a puncto C minus distet quam sit linea SN; et excessus, quo a cono superatur, minor sit solido X; haec enim fieri posse, ex demonstratis manifestum est. Sit jam inscripta figura qualis petitur, cujus centrum gravitatis sit I. Erit igitur IE linea major quam NP, cum SP sit aequa-

lis CE, et IC minor SN: et quia utraque simul BE, NP ad NP est ut conus ad X; excessus autem, quo conus inscriptam figuram superat, minor est solido X: ergo conus ad dictum excessum majorem rationem habebit quam utraque BE, NP ad NP: et dividendo, inscripta figura ad excessum, quo a cono superatur, majorem rationem habebit quam BE ad NP: habet autem BE ad EI minorem adhuc rationem quam ad NP cum IE, cum major sit NP. ergo inscripta figura ad excessum, quo a cono superatur, multo majorem rationem habet quam BE ad EI: quam igitur rationem habet inscripta ad dictum excessum, hanc habebit ad EI linea quaedam major ipsa BE. Sit illa ME. Quia igitur ME ad EI est, ut inscripta figura ad excessum, quo a cono superatur, et est E centrum gravitatis coni, I vero est gravitatis centrum inscriptae: ergo M erit centrum gravitatis reliquarum portionum, quibus conus inscriptam sibi figuram excedit, quod est impossibile. Non est ergo centrum gravitatis coni infra C punctum. Sed neque supra. Nam, si potest, sit R; et rursus sumatur linea SP contingenter in N secta: et quam rationem habet utraque simul BC, NP ad NS, hanc habeat conus ad X; et circumscribatur similiter cono figura, a qua minori quantitate superetur, quam sit solidum X: et linea, quae inter illius centrum gravitatis et C intercipitur, minor sit ipsa NP. Sit jam circumscripta, cujus centrum sit O: erit reliqua OR major ipsa NS; et quia ut utraque simul BC, PN ad NS, ita conus ad X: excessus vero, quo conus a circumscripta superatur, minor est quam X: ipsa vero BO minor est quam utraque simul BC, PN: ipsa autem OR major quam SN: conus igitur ad reliquas portiones, quibus a circumscripta superatur, multo majorem rationem habebit, quam BO ad OR. Habeat rationem illam MO ad OR: erit MO major ipsa BC; et M erit centrum gravitatis portionum, quibus conus a circumscripta superatur figura, quod est inconveniens. Non est ergo gravitatis centrum ipsius coni supra punctum C; sed neque infra, ut ostensum est, ergo erit ipsum C. Et idem eodem prorsus modo in pyramide quacumque demonstrabitur.

LEMMA III (1).

Si fuerint quatuor lineae continue proportionales; et quam rationem habet minima earum ad excessum, quo maxima minimam superat, eandem habuerit linea quaedam sumpta ad ⅗ excessus, quo maxima secundam superat: quam autem rationem habet linea his aequalis (maximae, duplae secundae, et triplae tertiae) ad lineam aequalem quadruplae maximae, quadruplae secundae, et quadruplae tertiae; eandem habuerit alia quaedam sumpta ad excessum, quo maxima secundam superat: erunt istae duae lineae simul sumptae quarta pars maximae proportionalium.

Sint enim quatuor lineae proportionales (*Fig.* 139) AB, BC, BD, BE, et quam rationem habet BE ad EA, eandem habeat FG ad ⅗ ipsius AC: quam autem rationem habet linea aequalis AB, et duplae BC, et triplae BD, ad aequalem quadruplae ipsarum AB, BC, BD, hanc habeat KG ad AC. Ostendendum est, KF quartam esse partem ipsius AB. Quia igitur AB, BC, BD, BE sunt proportionales, in eadem ratione erunt etiam AC, CD, DE: et ut quadrupla ipsarum AB, BC, BD ad AB cum dupla BC, et tripla BD, ita quadrupla ipsarum AC, CD, DE, hoc est quadrupla ipsius AE, ad AC cum dupla CD

(1) Abbiamo avuto più d'una volta occasione di avvertire come fino dai suoi verdi anni Galileo avesse progredito negli studj della Meccanica e dei movimenti locali. Una nuova confermazione l'abbiamo da questo lemma e dalla seguente determinazione del centro di gravità d'una piramide tronca; la quale sebbene pubblicata soltanto nel 1638, era già stata da lui composta più di cinquanta anni innanzi, come risulta dalla seguente attestazione apposta a un esemplare della medesima che si conserva originale nell'Ambrosiana di Milano (cod. A, n.° 71), e in copia nella Palatina (MSS. Gal. Par. V, T. 2, e Par. VI, T. 3).

Addì 12 Dicembre 1587. — Fassi fede come le presenti conclusioni e dimostrazioni sono state ritrovate da Messer Galileo Galilei.

Gio. Batt. Bardi de' conti di Vernio
Luigi di Piero Alamanni
Gio. Batt. de' baroni Ricasoli.

Addì 29 Dicembre 1587. — Io Giuseppe Moleto, lettore pubblico delle Matematiche nello Studio di Padova, dico aver letto i presenti Lemma e Teorema, i quali mi sono parsi buoni, e stimo l'Autore di essi esser buono ed esercitato Geometra.

et tripla DE; et sic est AC ad KG; ergo ut tripla ipsius AE ad AC cum dupla CD et tripla DE, ita $\frac{3}{4}$ ipsius AC ad KG; est autem, ut tripla AE ad triplam EB, ita $\frac{3}{4}$ AC ad GF; ergo per conversam vigesimam quartam quinti, ut tripla AE ad AC cum dupla CD et tripla DB, ita $\frac{3}{4}$ ipsius AC ad KF; et ut quadrupla AE ad AC cum dupla CD et tripla DB, hoc est ad AB cum CB et BD, ita AC ad KF: et permutando, ut quadrupla AE ad AC, ita AB cum CB et BD ad KF; ut autem AC ad AE, ita AB ad AB cum CB et BD; ergo ex aequali, in proportione perturbata, ut quadrupla AE ad AE, ita AB ad KF. Quare constat, KF quartam esse partem ipsius AB.

Propositio X.

Cujuscunque frusti pyramidis, seu coni plano basi aequidistante secti, centrum gravitatis in axe consistit, eumque ita dividit ut pars versus minorem basin ad reliquam sit ut tripla majoris basis cum spatio duplo medii geometrici *inter basin majorem et minorem una cum basi minori, ad triplam minoris basis cum eodem duplo spatii medii ac una cum basi majori.*

A cono vel pyramide, cujus axis AD (*Fig.* 140), secetur plano basi aequidistante frustum, cujus axis VD, et quam rationem habet tripla maximae basis cum dupla mediae, et minima, ad triplam minimae cum dupla mediae, et maxima, hanc habeat VO ad OD. Ostendendum est, O centrum gravitatis frusti existere. Sit VM quarta pars ipsius VD.

Exponatur linea HX ipsi AD aequalis, sitque KX aequalis AV, ipsarum vero HX, KX tertia proportionalis sit XL, et quarta XS: et quam rationem habet HS ad SX, hanc habeat MD ad lineam sumptam ab O versus A, quae sit ON; et quia major basis ad eam, quae inter majorem et minorem est media proportionalis, est, ut DA ad AV, hoc est, ut HX ad XK; dicta autem media ad minorem est, ut KX ad XL: erunt major, media et minor basis in eadem ratione, ac lineae HX, XK, XL.

Quare ut tripla majoris basis cum dupla mediae et minima, ad triplam minimae cum dupla mediae et maxima, hoc

est ut VO ad OD, ita tripla HX cum dupla XK et XL ad triplam XL cum dupla XK et XH: et componendo, et convertendo, erit OD ad DV, ut HX cum dupla XK et tripla XL ad quadruplam ipsarum HX, XK, XL.

Sunt igitur 4 lineae proportionales, HX, XK, XL, XS: et quam rationem habet XS ad SH, hanc habet linea quaedam sumpta NO ad $\frac{3}{4}$ ipsius DV, nempe ad DM; hoc est, ad $\frac{3}{4}$ ipsius HK; quam autem rationem habet HX cum dupla XK et tripla XL ad quadruplam ipsarum HX, XK, XL, eandem habet alia quaedam sumpta OD ad DV, hoc est ad HK: ergo (per ea quae demonstrata sunt) DN erit quarta pars ipsius HX, hoc est, ipsius AD; quare punctum N erit gravitatis centrum coni, vel pyramidis, cujus axis AD. Sit pyramidis, vel coni, cujus axis AV, centrum gravitatis I. Constat igitur, centrum gravitatis frusti esse in linea IN ad partes N extensa, in eoque ejus puncto, qui cum puncto N lineam intercipiat, ad quam IN eam habeat rationem, quam abscissum frustum habet ad pyramidem vel conum, cujus axis AV. Ostendendum itaque restat, IN ad NO eandem habere rationem quam frustum ad conum, cujus axis AV. Est autem ut conus, cujus axis DA, ad conum, cujus axis AV, ita cubus DA ad cubum AV, hoc est, cubus HX ad cubum XK; haec autem eadem est proportio, quam habet HX ad XS: quare dividendo, ut HS ad SX, ita erit frustum, cujus axis DV, ad conum vel pyramidem, cujus axis VA; est autem, ut HS ad SX, ita etiam MD ad ON: quare frustum ad pyramidem, cujus axis AV, est ut MD ad NO. Et quia AN est $\frac{3}{4}$ ipsius AD; AI autem est $\frac{3}{4}$ ipsius AV, erit reliqua IN $\frac{3}{4}$ reliquae VD; quare IN aequalis erit ipsi MD. At demonstratum est, MD ad NO esse ut frustum ad conum AV; constat ergo, hanc eandem rationem habere etiam IN ad NO: quare patet propositum.



GIORNATA QUINTA,

DA AGGIUGNERSI ALL'ALTRE QUATTRO

DE' DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE (1).

SALV. Grandissima è la consolazione ch' io sento nel vedere, dopo l' interposizione di qualche anno, rinnovata in questo giorno la nostra solita adunanza. So che l' ingegno vivace del Sig. Sagredo è tale che non sa stare in ozio, però mi persuado che egli non avrà mancato di fare, nel tempo della nostra lontananza, qualche reflessione sopra le dottrine del moto, le quali furon lette nell' ultima giornata de' nostri passati colloquj. Io, che dalla virtuosa conversazione di V. S., ed anco del nostro Sig. Simplicio, ho sempre raccolto frutti di non volgare erudizione, la prego a voler proporre qualche nuova considerazione sopra le cose del nostro Autore già lette da noi. Così daremo principio agli usati discorsi per passar questa giornata nell' occupazione di virtuoso trattenimento.

SAGR. Non nego a V. S. che in questi anni mi siano passati per la fantasia varj pensieri sopra le novità dimostrate da quel buon Vecchio intorno alla sua scienza del moto, sottoposta e ridotta da lui alle dimostrazioni della geometria. Ed ora, poichè ella così comanda, procurerò di rammentarmi qualche cosa, e darò a lei occasione di beneficare il mio intelletto co' suoi dotti ragionamenti.

(1) Veggasi l'Avvertimento in testa del volume.

Per cominciar dunque per ordine dal principio del trattato de' moti, proporrò a V. S. uno scrupolo mio antico rinnovatomi nel considerare la dimostrazione che l'Autore apporta nella sua prima proposizione del moto equabile, la quale procede (come molte altre degli antichi e moderni scrittori) per via degli ugualmente multiplici. Questa è una certa ambiguità che io ho sempre avuta nella mente intorno alla quinta, o come altri vogliono sesta difinizione del quinto libro di Euclide. Stimo mia somma prosperità di aver potuto incontrare occasione di conferir questo dubbio con V. S., del quale spero dover restar totalmente liberato.

Simp. Anzi che io ancora riconoscerò questo nuovo abboccamento con le SS. VV. per benefizio singolare della fortuna, se mi succederà di poter ricever qualche luce intorno a questo punto accennato dal Sig. Sagredo. Non ebbi mai il più duro ostacolo di questo in quella poca di geometria che io studiai già nelle scuole da giovanetto. Però ella s'immagini quanto sia per dovermi esser caro, se dopo tanto tempo sentirò intorno a questo particolare qualche cosa di mia soddisfazione.

Sagr. Dico dunque, che avendo sentito, nel dimostrar la prima proposizione dell'Autore intorno al moto equabile, adoprarsi gli ugualmente multiplici conforme alla quinta, ovvero sesta difinizione del quinto libro di Euclide, ed avendo io un poco di dubbio già antiquato intorno a questa difinizione, non restai con quella chiarezza che io avrei desiderato nella predetta proposizione. Ora mi sarebbe pur caro il poter intender bene quel primo principio, per poter poi con altrettanta evidenza restar capace delle cose che seguono intorno alla dottrina del moto.

Salv. Procurerò di soddisfare al desiderio di V. S. con addomesticare in qualche altra maniera quella difinizione di Euclide, e spianar la strada, per quanto mi sarà possibile, all'introduzione delle proporzionalità. Intanto sappia pure di aver avuto per compagni in questa ambiguità uomini di gran valore, i quali per lungo tempo sono stati con la medesima poca soddisfazione con la quale V. S. mi dice di ritrovarsi fino a questo giorno.

Io poi confesso, che per qualche anno dopo aver istudiato il quinto libro di Euclide, restai involto con la mente nella stessa caligine. Superai finalmente la difficultà, quando nello studiare le maravigliose Spirali di Archimede, incontrai nel bel principio del libro una dimostrazione simile alla predetta del nostro Autore. Quell'occasione mi fece andar pensando se per fortuna ci fusse altra strada più agevole, per la quale si potesse arrivare al medesimo fine, ed acquistare per me, ed anco per altri, qualche precisa cognizione nella materia delle proporzioni: però applicai allora l'animo con qualche attenzione a questo proposito, ed esporrò adesso quanto fu da me speculato in quell'opportunità, sottoponendo ogni mio progresso al purgatissimo giudizio delle SS. VV.

Suppongasi primieramente (come le suppose anco Euclide, mentre le difinì) che le grandezze proporzionali si trovino. Cioè, che date in qualunque modo tre grandezze, quella proporzione, o quel rispetto, o quella relazione di quantità, che ha la prima verso la seconda, la stessa possa averla una terza verso una quarta. Dico poi, che per dare una difinizione delle suddette grandezze proporzionali, la quale produca nell'animo del lettore qualche concetto aggiustato alla natura di esse grandezze proporzionali, dovremmo prendere una delle loro passioni, ma però la più facile di tutte, e quella per appunto che si stimi la più intelligibile anco dal volgo non introdotto nelle matematiche. Così fece Euclide stesso in molti altri luoghi. Sovvengavi che egli non disse il cerchio essere una figura piana, dentro la quale segandosi due linee rette, il rettangolo sotto le parti dell'una sia sempre uguale al rettangolo sotto le parti dell'altra: ovvero, dentro la quale tutti i quadrilateri abbiano gli angoli opposti uguali a due retti. Quando anche così avesse detto, sarebbero state buone difinizioni. Ma mentre egli sapeva un'altra passione del cerchio più intelligibile della precedente e più facile da formarsene concetto, chi non si accorge che egli fece assai meglio a mettere avanti quella più chiara e più evidente come difinizione, per cavar poi da essa quell'altre più recondite, e dimostrarle come conclusioni?

SAGR. Per certo che così è, ed io credo che rari saranno gl' ingegni, i quali totalmente si acquietino a questa difinizione, se io con Euclide dirò così:

Allora quattro grandezze sono proporzionali, quando gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accorderanno sempre nel superare, mancare o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta.

E chi è quello d'ingegno tanto felice, il quale abbia certezza che allora quando le quattro grandezze sono proporzionali, gli ugualmente multiplici si accordino sempre? Ovvero chi sa che quegli ugualmente multiplici non si accordino sempre anco quando le grandezze non siano proporzionali? Già Euclide nelle precedenti difinizioni aveva detto:

La proporzione tra due grandezze essere un tal rispetto o relazione tra di loro, per quanto si appartiene alla quantità.

Ora avendo il lettore concepito già nell' intelletto che cosa sia la proporzione fra due grandezze, sarà difficil cosa che egli possa intendere che quel rispetto o relazione, che è fra la prima e la seconda grandezza, allora sia simile al rispetto o relazione che si trova fra la terza e la quarta grandezza, quando quegli ugualmente multiplici della prima e della terza si accordan sempre nella maniera predetta con gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta nell'esser sempre maggiori o minori o uguali.

SALV. Comunque ciò sia, parmi questo di Euclide piuttosto un teorema da dimostrarsi, che una difinizione da premettersi. Però avendo io incontrato tanti ingegni, i quali hanno arenato in questo luogo, mi sforzerò di secondare con la difinizione delle proporzioni il concetto universale degli uomini anche ineruditi nella geometria, e procederò in questo modo.

Allora noi diremo quattro grandezze esser fra loro proporzionali, cioè aver la prima alla seconda la stessa proporzione che ha la terza alla quarta, quando la prima sarà eguale alla seconda, e la terza ancora sarà eguale alla quarta; ovvero, quando la prima sarà tante volte multiplice della

seconda, quante volte precisamente la terza è multiplice della quarta. Troverà dubbio alcuno il Sig. Simplicio nell' intender questo?

SIMP. Certo che no.

SALV. Ma perchè non sempre accaderà che fra le quattro grandezze si trovi per appunto la predetta egualità, ovvero multiplicità precisa, procederemo più oltre, e domanderò al Sig. Simplicio: Intendete voi che le quattro grandezze allora siano proporzionali, quando la prima contenga, p. e., tre volte e mezzo la seconda, ed anco la terza contenga tre volte e mezzo la quarta?

SIMP. Intendo benissimo fin qui, ed ammetto che le quattro grandezze siano proporzionali, non solo nel caso esemplificato da V. S., ma ancora secondo qualsivoglia altra denominazione di multiplicità, o superparziente, o superparticolare.

SALV. Per raccoglier dunque ora in breve e con maggiore universalità tutto quello che si è detto ed esemplificato fin qui, diremo, che

Allora noi intendiamo quattro grandezze esser proporzionali fra loro, quando l' eccesso della prima sopra la seconda (qualunque egli sia) sarà simile all' eccesso della terza sopra la quarta.

SIMP. Fin qui io non avrei difficultà, ma mi pare che V. S. in questa maniera non apporti la difinizione delle grandezze proporzionali, se non quando le antecedenti saranno maggiori delle loro conseguenti; poichè ella suppone che la prima ecceda la seconda, e che anco la terza ecceda similmente la quarta. Ma ora interrogo io, come dovrò governarmi quando le antecedenti siano minori delle loro conseguenti?

SALV. Rispondo, che quando V. S. avrà le quattro grandezze in tal modo, che la prima sia minor della seconda, e la terza minor della quarta, allora sarà la seconda maggior della prima e la quarta maggior della terza. Però V. S. le consideri con quest' ordine inverso, e s' immagini che la seconda sia prima, e la quarta sia terza. Così avrà le antecedenti maggiori delle conseguenti, e non avrà bisogno di cercare allora difinizione diversa dalla già apportata da noi.

Sagr. Così è per appunto. Ma seguiti V. S. per grazia col presupposto già fatto di considerare sempre le antecedenti maggiori delle loro conseguenti; il che mi pare che faciliti assai a lei il discorso ed a noi l'intelligenza.

Salv. Stabilita questa per difinizione, soggiugnerò anco in qual altro modo s'intendano quattro grandezze esser fra loro proporzionali, ed è questo. Quando la prima, per avere alla seconda la medesima proporzione che la terza alla quarta, non è punto nè maggiore nè minore di quello che ella dovrebbe essere, allora s'intende aver la prima alla seconda la medesima proporzione che ha la terza alla quarta. Con questa occasione difinirei ancora la proporzione maggiore, e direi così:

Ma quando la prima grandezza sarà alquanto più grande di quel che ella dovrebbe essere per avere alla seconda la medesima proporzione che ha la terza alla quarta, allora voglio che convenghiamo di dire, che la prima abbia maggior proporzione alla seconda di quella che ha la terza alla quarta.

Simp. Bene: ma quando la prima fusse minore di quel che ella dovrebbe esser per avere alla seconda quella medesima proporzione che ha la terza alla quarta?

Salv. Mentre la prima sia minor di quel che si ricercherebbe per aver alla seconda quella medesima proporzione che ha la terza alla quarta, sarà segno evidente che la terza è maggior del giusto, per aver alla quarta quella tal proporzione che ha la prima alla seconda. Però in questo caso ancora V. S. si contenti di concepir l'ordine in altro modo, e s'immagini che quelle grandezze, che erano terza e quarta, diventino prima e seconda, e quell'altre, che erano prima e seconda, V. S. le riponga ne' luoghi della terza e della quarta.

Sagr. Fin'ora intendo benissimo il concetto di V. S. e l'introduzione con la quale ella dà principio alla speculazione delle proporzionali. Parmi ora che ella si sia messa in obbligo di adempire una delle due cose, cioè o di dimostrare con questi suoi principj tutto il quinto di Euclide, ovvero di

dedurre da queste due difinizioni poste da V. S. quell'altre due, che Euclide mette per quinta e per settima fra le difinizioni, sopra le quali poi egli fonda tutta la macchina del medesimo quinto libro. Se V. S. dimostrerà queste come conclusioni, non mi resterà più che desiderare intorno a questa materia.

Salv. Questa per appunto è l'intenzion mia, poichè quando si comprenda con evidenza, che date quattro grandezze proporzionali, conforme alla medesima difinizione, gli ugualmente multiplici della prima e della terza si accordano eternamente per necessità in pareggiare o mancare o eccedere gli egualmente multiplici della seconda e quarta, allora senza altra scorta si può entrare nel quinto libro di Euclide, e si possono intender con evidenza i teoremi delle grandezze proporzionali. Così ancora se con la posta difinizione della proporzion maggiore dimostrerò che in qualche caso, presi gli ugualmente multiplici della prima e della terza, ed anco della seconda e della quarta, quel della prima ecceda quel della seconda, ma quel della terza non ecceda quel della quarta, si potrà con questa dimostrazione scorrere gli altri teoremi delle grandezze sproporzionali. Poichè questa nostra conclusione sarà per appunto la difinizione, della quale, come per principio, si serve Euclide stesso.

Simp. Quando io restassi persuaso di queste due passioni degli ugualmente multiplici, cioè che mentre le quattro grandezze son proporzionali, quelli eternamente si accordano nel pareggiare o eccedere o mancare; e che, quando le quattro grandezze non son proporzionali, quelli in qualche caso discordano, io per me non richiederei altra luce per intender con chiarezza tutto il quinto degli Elementi Geometrici.

Salv. Ora ditemi, Sig. Simplicio, se noi supporremo che le quattro grandezze A, B, C, D, siano proporzionali, cioè che la prima A alla seconda B abbia la stessa proporzione che la terza C ha verso la quarta D, intendete voi, che anco due delle prime verso la seconda avranno la medesima proporzione che due delle terze verso la quarta?

A B

C D

Simp. Io l'intendo assai bene, imperciocchè mentre una prima alla seconda ha la medesima proporzione che una terza alla quarta, non saprei immaginarmi per qual ragione due delle prime alla seconda debbano aver proporzion diversa da quella che hanno due delle terze alla quarta.

Salv. Adunque mentre V. S. intende questo, intenderà ancora che quattro o dieci o cento delle prime ad una seconda avranno la stessa proporzione che hanno quattro o dieci o cento delle terze ad una quarta.

Simp. Certo che sì, e purchè i numeri delle multiplicità siano uguali, facilmente apprendo che la prima presa due volte o dieci o cento, avrà la stessa proporzione verso la seconda, che ha la terza presa anche essa due volte o dieci o cento verso la quarta. Sarebbe ben difficile persuadermi il contrario.

Salv. Non è dunque ardua cosa il capire, che il multiplice della prima abbia la stessa proporzione alla seconda, che ha l'ugualmente multiplice della terza alla quarta; cioè che la prima multiplicata quante volte ci pare abbia alla seconda quella proporzione stessa che ha la terza multiplicata altrettante volte verso la quarta. Ora tutto quello che io ho esemplificato fin qui con multiplicare le grandezze antecedenti, ma non già le conseguenti, immaginatevi che sia detto anco intorno al multiplicare le conseguenti solamente senza punto alterare l'antecedenti, e ditemi: Credete voi, che date quattro grandezze proporzionali, la prima a due delle seconde abbia proporzion diversa da quella che ha la terza a due delle quarte?

Simp. Credo assolutamente di no; anzi quando una prima abbia ad una seconda la medesima proporzione, che una terza ha verso la quarta, intendo assai bene che quella stessa prima a due o quattro o dieci delle seconde avrà quella medesima proporzione che ha la stessa terza verso due o quattro o dieci delle quarte.

Salv. Ammettendo dunque voi questo, confessate di restar appagato e d'intender con facilità, che date quattro grandezze proporzionali A, B, C, D (*Fig.* 141), e multipli-

cate ugualmente la prima e la terza, quella proporzione che ha il multiplice E della prima A alla seconda B, la stessa ancora abbia precisamente l'ugualmente multiplice F della terza C alla quarta D (1). Immaginatevi dunque che queste siano le nostre quattro grandezze proporzionali E, B, F, D, cioè il multiplice E della prima sia prima, la seconda stessa B sia seconda, il multiplice poi F della terza sia terza, e la quarta D sia quarta. V. S. mi ha anco detto di capire che multiplicandosi egualmente le conseguenti B, D, cioè la seconda e la quarta, senza alterar punto le antecedenti, la medesima proporzione avrà la prima al multiplicato della seconda, che la terza al multiplicato della quarta. Ma queste quattro grandezze saranno per appunto E, F, ugualmente multiplici della prima e della terza, e G, H egualmente multiplici della seconda e della quarta.

Sagr. Confesso che di ciò resto interamente appagato, ed ora intendo benissimo la necessità per la quale gli ugualmente multiplici delle quattro grandezze proporzionali eternamente si accordano nell'essere o maggiori o minori o eguali, ec. Poichè, mentre presi gli ugualmente multiplici della prima e della terza, e gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta, V. S. mi dimostra che il multiplice della prima al multiplice della seconda ha la medesima proporzione che il multiplice della terza ha verso il multiplice della quarta, scorgo manifestamente, che quando il multiplice della prima sia maggiore del multiplice della seconda, allora il multiplice della terza dovrà necessariamente (per servar la proporzione) esser maggiore del multiplice della quarta. Quando poi sia minore, ovvero uguale, anche il multiplice della terza dovrà esser minore ovvero uguale al multiplice della quarta.

Simp. Io ancora non sento in ciò repugnanza veruna. Resto bene con desiderio d'intendere come (supposte le quattro grandezze sproporzionali) sia vero, che gli ugualmente multiplici non servino sempre quella concordanza nell'esser maggiori o minori o uguali.

(1) È la quarta proposizione del V.° di Euclide.

Salv. Io in questo ancora procurerò che V. S. abbia compiuta soddisfazione.

Ponghansi le quattro grandezze date AB, C, D, E (*Fig.* 142) e sia la prima AB alquanto maggiore di quello che ella dovrebbe essere per avere alla seconda C quella medesima proporzione che ha la terza D alla quarta E. Mostrerò, che presi in certa particolar maniera gli ugualmente multiplici della prima e della terza, e presi altri ugualmente multiplici della seconda e quarta, quello della prima si troverà maggiore di quello della seconda, ma quello della terza non sarà altrimenti maggiore di quello della quarta, anzi lo dimostrerò esser minore (1).

Intendasi dunque esser levato dalla prima grandezza AB quell' eccesso, il quale la faceva maggiore di quanto ella dovrebbe essere acciò fusse precisamente proporzionale, e sia tale eccesso l' FB. Resteranno ora dunque le quattro grandezze proporzionali, cioè la rimanente AF alla C avrà la medesima proporzione che ha la D alla E.

Multiplichisi FB tante volte che ella sia maggior della C e sia questo multiplice il segnato HI. Prendasi poi HL altrettante volte multiplice della AF, e la M della D, quante volte per appunto l' HI sarà stata presa multiplice della FB. Stante questo non è dubbio alcuno che tante volte sarà multiplice la composta LI della composta AB, quante volte la HI della FB, ovvero la M della D è multiplice.

Prendasi ora la N multiplice della C con tal legge che la stessa N sia prossimamente maggiore della LH; ed in ultimo, quanto sarà multiplice la N della C, altrettanto pongasi la O multiplice della E.

Ora essendo la multiplice N prossimamente maggiore della LH, se noi dalla N intenderemo esser levata una delle grandezze sue componenti (che sarà eguale alla C), resterà il residuo non maggiore della LH. Se dunque alla stessa N renderemo la grandezza eguale alla C (che intendemmo esser levata), ed alla LH, che è non minore di detto residuo, ag-

(1) Questa proposizione è il converso della settima del V.° di Euclide.

giugneremo la HI, che pure è maggiore dell' aggiunta alla N, sarà tutta la LI maggiore della N.

Ecco dunque un caso, nel quale il multiplice della prima supera il multiplice della seconda. Ma essendo le quattro grandezze AF, C, D, E fatte proporzionali da noi, ed essendosi presi gli ugualmente multiplici LH ed M della prima e della terza, ed N ed O della seconda e della quarta, saranno essi (per le cose già stabilite di sopra) sempre concordi nell' esser maggiori o minori o uguali. Però essendo il multiplice LH della prima grandezza minore del multiplice N della seconda, per la nostra costruzione, sarà anco il multiplice M della terza minore necessariamente del multiplice O della quarta.

Si è per tanto provato che mentre la prima grandezza sarà alquanto maggiore di quello che ella dovrebbe essere per avere alla seconda la stessa proporzione che ha la terza alla quarta, allora sarà possibile di prendere in qualche modo gli ugualmente multiplici della prima e della terza, ed altri ugualmente multiplici della seconda e della quarta, e dimostrare che il multiplice della prima eccede il multiplice della seconda, ma il multiplice della terza non eccede quel della quarta.

Sagr. Molto bene ho inteso quanto V. S. ha dimostrato sin qui. Resta ora, che ella da queste dimostrate premesse deduca come necessarie conclusioni le due controverse difinizioni di Euclide (1), il che spero le sarà facile, avendo di già dimostrati due Teoremi conversi di quelle.

Salv. Facili per appunto riusciranno; e per dimostrare la quinta difinizione io procederò così:

Se delle quattro grandezze A, B, C, D (*Fig.* 143), gli ugualmente multiplici della prima e terza, presi secondo qualunque multiplicità, sempre si accorderanno nel pareggiare o mancare, ovvero eccedere gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta respettivamente, io dico che le quattro grandezze son fra di loro proporzionali.

(1) La quinta e la settima del V.°

Imperciocchè siano (se è possibile) non proporzionali. Adunque una delle antecedenti sarà maggiore di quello che ella dovrebbe essere per avere alla sua conseguente la stessa proporzione che ha l' altra antecedente alla sua conseguente. Sia per esempio la segnata A. Adunque per le cose già dimostrate, pigliandosi gli ugualmente multiplici della A e della C in una tal maniera, e pigliandosi gli ugualmente multiplici delle B, D nel modo che si è insegnato, si mostrerà la multiplice di A maggiore della multiplice di B, ma la multiplice di C non sarà altrimenti maggiore, ma minore della multiplice di D, che è contro al supposto fatto da noi.

Per dimostrar la settima diffinizione dirò così. Siano le quattro grandezze A, B, C, D, e suppongasi che presi in qualche particolar maniera gli ugualmente multiplici delle due antecedenti prima e terza, e gli ugualmente multiplici delle due conseguenti seconda e quarta, suppongasi, dico, che si trovi un caso, nel quale il multiplice di A sia maggior del multiplice di B, ma il multiplice di C non sia maggior del multiplice di D. Io dico che la A alla B avrà maggior proporzione che la C alla D, cioè che la A sarà alquanto maggiore di quel che ella dovrebbe essere per avere alla B la stessa proporzione che ha la C alla D.

Se è possibile, non sia A maggior del giusto, sarà dunque precisamente proporzionale, ovvero minor del giusto per esser proporzionale. Quanto al primo, se ella fusse precisamente aggiustata e proporzionale, sarebbero, per le cose già provate, gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi in qualunque modo, sempre concordi nel pareggiare o mancare o eccedere gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta; il che è contro alla supposizione.

Se poi la prima fusse minor del giusto per esser proporzionale, questo è segno che la terza sarebbe maggiore del suo dovere per avere alla quarta quella proporzione che ha la prima alla seconda. Allora io direi che si levasse dalla terza quell' eccesso che la fa esser maggior del giusto. E però la rimanente resterebbe poi per appunto proporzionale. Ora, considerando quei multiplici particolari supposti da principio, è

manifesto, che essendo il multiplice della prima maggior del multiplice della seconda, anco il multiplice della terza, cioè di quella rimanente, sarà maggior del multiplice della quarta. Adunque se in cambio di pigliar il multiplice di quella rimanente, ripiglieremo l'egualmente multiplice di tutta la terza intera, questo sarà maggior che non era il multiplice di quella rimanente; e però sarà questo stesso molto maggiore di quel della quarta. Il che è contro la supposizione.

Sagr. Resto soddisfattissimo di questa dilucidazione fattami da V. S. in materia, nella quale io ne aveva già lungo tempo bisogno: nè saprei esprimere quale in me sia maggiore o il gusto di questa cognizione nuovamente acquistata o il rammarico di non averla io procurata col chiederla a V. S. fin da principio de' nostri primi abboccamenti, tanto più avendo io inteso che ella la conferiva a diversi amici, a'quali per la vicinanza era lecito di frequentar la sua villa. Ma seguitiamo di grazia i discorsi, quando però il Sig. Simplicio non abbia che replicare intorno alla materia fin qui considerata.

Simp. Io non saprei che soggiugnere, anzi resto interamente appagato del discorso, e capace delle dimostrazioni sentite.

Salv. Posti questi fondamenti, si potrebbe compendiare in parte e riordinare tutto il quinto di Euclide, ma ciò sarebbe una digressione troppo lunga e troppo lontana dal nostro principale intento. Oltre che io so che le SS. VV. averanno veduto di simili compendj stampati da altri autori.

Ora essendosi considerate fin qui, a riquisizione delle SS. VV., le difinizioni quinta e settima del quinto libro, spero che esse concederanno volentieri a me il poter proporre adesso un'antica mia osservazione sovvenutami sopra un'altra difizione di Euclide medesimo. Il soggetto non sarà diverso dall' incominciato, e non parrà alieno dal nostro proposito, essendo intorno alla proporzion composta, la quale vien maneggiata spesse volte dal nostro Autore ne' suoi libri.

Trovasi fra le difinizioni del sesto libro di Euclide la quinta della proporzion composta, la quale dice in questo modo:

Allora una proporzione si dice comporsi di più proporzioni, quando le quantità di dette proporzioni multiplicate insieme avranno prodotto qualche proporzione.

Osservo poi, che nè il medesimo Euclide, nè alcun altro autore antico, si serve della stessa difinizione nel modo nel quale ell' è stata posta nel libro: onde ne seguono due inconvenienti, cioè al lettore difficultà d' intelligenza, ed allo scrittore nota di superfluità.

Sagr. Questo è verissimo, ma non mi par probabile che la suprema accuratezza di Euclide abbia fra' suoi libri posta questa difinizione inconsideratamente ed invano. Però non sarei affatto fuor di sospetto che ella vi fusse stata aggiunta da altri o almeno alterata di tal sorta, che ella oggidì non si riconosca più, mentre dagli autori si pone in opera nel dimostrare i teoremi.

Simp. Che gli altri autori non se ne servano, io lo crederò alle SS. VV. non avendovi fatto molto studio: mi dispiacerebbe bene se da Euclide stesso, il quale viene stimato da voi altri per tanto puntuale nelle sue scritture, fusse stata posta indarno. Ma qui bisogna poi che io confessi come l'intelletto mio, il quale non si è mai più che mediocremente inoltrato nella matematica, ha incontrato difficultà intorno a questa difinizione, forse non minore che nelle già spianate dal Sig. Salviati.

Mi ajutai un tempo fa con legger lunghissimi commenti scritti sopra queste materie, ma. per dire il vero, non conobbi giammai che mi si sgombrassero quelle tenebre che mi tenevano offuscato l' intelletto. Però se V. S. avesse qualche particolar considerazione che mi facilitasse questo ancora, l' assicuro che mi farebbe un favore molto segnalato.

Salv. Forse ella si presuppone che questa sia materia di profonde speculazioni, e pure troverà che non consiste in altro che in un semplicissimo avvertimento.

S' immagini V. S. le due grandezze A, B (*Fig.* 144) dello stesso genere. Averà la grandezza A alla B una tal proporzione; e dopo concepisca esser posta fra di loro un' altra grandezza C pur dello stesso genere. Si dice che quella tal pro-

porzione che ha la grandezza A alla B viene ad esser composta delle due proporzioni intermedie, cioè di quella che ha la A alla C, e di quella che ha la C alla B. Questo è per appunto il senso, secondo il quale Euclide si serve della predetta difinizione.

Simp. È vero che Euclide intende in questo modo la proporzione composta, ma però non intend' io come la grandezza A alla B abbia proporzion composta delle due proporzioni, cioè della A alla C e della C alla B.

Salv. Ora ditemi, Sig. Simplicio, intendete voi che la A alla B abbia qualche proporzione, qualunque ella sia?

Simp. Essendo esse del medesimo genere, Signor sì.

Salv. E che quella proporzione sia immutabile, e non possa mai essere altra o diversa da quella che ella è?

Simp. Intendo questo ancora.

Salv. Vi soggiungo ora io, che nello stesso modo per appunto l' A alla C ha una proporzione immutabile, e così anco la C alla B. La proporzione poi, che è fra le due estreme A e B, si chiama esser composta delle due proporzioni, che mediano fra esse estreme, cioè di quella che ha la A alla C, e di quella che ha la C alla B.

Aggiungo di più, che se V. S. fra queste grandezze A e B s' immaginerà che sia frapposta non una grandezza sola, ma più d' una, come ella vede in questi segni A, C, D, B, s' intenderà pure la propor- A, C, D, B, *zione della A alla B esser composta di tutte le proporzioni, le quali sono intermedie fra di esse, cioè delle proporzioni che hanno la A alla C, la C alla D, e la D alla B; e così se più fussero le grandezze, sempre la prima all' ultima ha proporzion composta di tutte quelle proporzioni, le quali mediano fra di esse.*

Avvertisco ora in quest' occasione, che quando le proporzioni componenti siano uguali fra di loro, o per dir meglio siano le stesse, allora la prima all' ultima averà, come di sopra abbiamo detto, una tal proporzione composta di tutte le proporzioni intermedie; ma perchè quelle proporzioni intermedie sono tutte uguali, potremo esprimere il medesimo nostro senso con dire, che la proporzione della prima all' ul-

tima ha una proporzione tanto multiplice della proporzione che ha la prima alla seconda, quante per appunto saranno le proporzioni che si frappongono fra la prima e l' ultima. Come per esempio, se fussero tre termini, e che la medesima proporzione fusse fra la prima e la seconda, che è fra la seconda e la terza, allora sarebbe vero che la prima alla terza averebbe proporzion composta delle due proporzioni, le quali sono fra la prima e la seconda, e fra la seconda e la terza; ma perchè queste due proporzioni si suppongono uguali, cioè le stesse, potrà dirsi che la proporzione della prima alla terza è duplicata della proporzione che ha la prima alla seconda. Così, quando le grandezze fussero quattro, si potrebbe dire che la proporzione della prima alla quarta è composta di quelle tre proporzioni intermedie, ed ancora che è triplicata della proporzione della prima alla seconda, venendo composta tal proporzione, che ha la prima alla quarta, della proporzione della prima alla seconda tre volte presa ec.

Ma qui finalmente non vanno contemplazioni nè dimostrazioni, imperciocchè è una semplice imposizione di nome. Quando a V. S. non piacesse il vocabolo di composta, chiamiamola incomposta, o impastata, o confusa, o in qualunque modo più aggrada a V. S.; solo accordiamoci in questo, che quando poi averemo tre grandezze dello stesso genere, ed io nominerò la proporzione incomposta, o impastata, o confusa, vorrò intendere la proporzione che hanno l' estreme di quelle grandezze, e non altro.

Sagr. Tutto questo intendo benissimo, anzi ho più d' una volta osservato l' artifizio d' Euclide nella proposizione dove ei dimostra che i parallelogrammi equiangoli hanno la proporzione composta delle proporzioni de' lati. Egli si trova in quel caso aver le due proporzioni componenti in quattro termini, che sono i quattro lati de' parallelogrammi; però comanda che quelle due proporzioni si mettano in tre termini solamente, sì che una di quelle proporzioni sia fra il primo termine e il secondo, l' altra sia fra il secondo e il terzo. Nella dimostrazione poi non fa altro se non che ei dimostra che l' un parallelogrammo all' altro è come il primo termine al terzo,

cioè ha la proporzione composta di due proporzioni, di quella che ha il primo termine al secondo, e dell' altra che ha il secondo al terzo; le quali sono quelle due proporzioni, che prima egli aveva disgiunte ne' quattro lati de' parallelogrammi.

SALV. V. S. discorre benissimo. Ora intesa e stabilita la difinizione della proporzione composta in questo modo (la quale non consiste in altro fuori che nell' accordarsi che sorta di roba noi intendiamo sotto quel nome), si può dimostrare la proposizione ventitrè del sesto libro d' Euclide come la dimostra egli stesso, perchè quivi ei non suppone la difinizione nel modo nel quale ell' è divulgata, ma bensì nel modo detto sopra da noi. Dopo la nominata proposizion 23 io soggiugnerei, come corollario di essa, la divulgata difinizione quinta del sesto libro della proporzion composta, tramutandola però in un teorema.

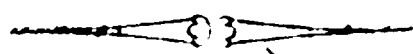
Pongansi due proporzioni, una delle quali sia ne' termini A, B, l' altra ne' termini C, D (*Fig.* 145). Dice la difinizione vulgata, che la proporzione composta di queste due proporzioni si averà se noi multiplicheremo fra di loro le quantità di esse proporzioni. Io concorro col Sig. Simplicio nel credere che questa sia una proposta difficile da capirsi, e bisognosa di prova; però con poca fatica noi la dimostreremo così:

Se li quattro termini delle due proporzioni non fussero in linee, ma in altre grandezze, immaginiamoci che e' siano posti in linee rette. Facciasi poi delle due antecedenti A, C un rettangolo, sì come delle due consegnenti B, D un altro rettangolo. È chiaro, per la 23 del sesto d' Euclide, che il rettangolo fatto dalle A, C al rettangolo dalle B, D averà quella proporzione, che è composta delle due proporzioni A verso B, e C verso D, le quali son queste due che ponemmo da principio affine di ritrovare qual fusse la proporzione che risultava dalla comparazione di esse. Essendo dunque la proporzione composta delle proporzioni A verso B, e C verso D, quella che ha il rettangolo AC al rettangolo BD, per la suddetta proposizion 23 del sesto, io domando al Sig. Simplicio come abbiamo noi fatto per ritrovare questi due termini, ne' quali consiste la proporzione che si cercava da noi?

Simp. Io non credo che si sia fatto altro, se non formar due rettangoli con quelle quattro linee poste da principio, uno cioè con le antecedenti A, C, e l'altro con le conseguenti B, D.

Salv. Ma la formazione de' rettangoli nelle linee della Geometria corrisponde per appunto alla multiplicazione dei numeri nell'Aritmetica, come sa ogni matematico anche principiante, e le cose che noi abbiamo multiplicate sono state le linee A, C e le linee B, D, cioè i termini omologhi delle poste proporzioni;

Ecco dunque, come multiplicando insieme le quantità o le valute delle date proporzioni semplici, si produce la quantità o la valuta della proporzione, la quale poi si chiama composta di quelle.



GIORNATA SESTA,

DELLA

FORZA DELLA PERCOSSA (1).

SAGR. L'assenza di V. S., Sig. Salviati, in questi quindici giorni mi ha dato campo di poter vedere le proposizioni attenenti a' centri di gravità de' solidi, e anco di dare un'altra diligente lettura alle dimostrazioni delle tante e sì nuove proposizioni de' moti naturali e violenti; e perchè ne sono tra esse non poche di assai difficile apprensione, di speziale ajuto mi è stata la conferenza di questo gentiluomo, che V. S. qui vede.

SALV. Io voleva appunto domandar V. S. dell'essere appresso di lei questo Signore, e del mancarne il nostro Signor Simplicio.

SAGR. Dell'assenza del Sig. Simplicio mi vo immaginando, anzi lo tengo per fermo, che cagione ne sia stata la grande oscurità che egli ha incontrata in alcune dimostrazioni di varj problemi attenenti al moto, e più di altre sopra le proposizioni del centro di gravità; parlo di quelle, che per lunghe concatenazioni di varie proposizioni degli

(1) In questa Giornata all'interlocutore Simplicio è sostituito l'Aproino, esimio matematico di Treviso ed amico di Galileo, come fu avvertito a suo luogo nella Corrispondenza Epistolare, e come qui amplamente attesta l'Autore per bocca del Sagredo. (GLI EDITORI).

elementi della geometría vengono inapprensibili a quelli, che tali elementi non hanno prontissimi alle mani. Questo gentiluomo poi, che qui vede, è il Sig. Paolo Aproino, nobile trivisano, stato non solamente uditore del nostro Accademico, mentre lesse in Padova, ma suo intrinsechissimo familiare, e di lunga e continuata conversazione, nella quale insieme con altri (tra'quali fu principalissimo il Sig. Daniello Antonini nobilissimo d'Udine, d'ingegno e di valore sopraumano, il quale per difesa della patria, e del suo Serenissimo Principe, gloriosamente morì, ricevendo onori condegni al suo merito dalla Serenissima Repubblica Veneta) intervenne in particolare a gran numero di esperienze, che intorno a diversi problemi in casa esso Accademico si facevano. Ora essendo circa dieci giorni fa venuto questo Signore a Venezia, e conforme al suo solito a visitarmi, sentendo come aveva appresso di me questi trattati del comune amico, ha preso gusto che gli vediamo insieme; e, sentendo l'appuntamento del ritrovarci a parlare sopra il maraviglioso problema della percossa, mi ha detto come ne aveva più volte discorso, ma sempre irresolutamente ed ambiguamente, con esso Accademico, col quale mi diceva che si era trovato, nel far diverse esperienze attenenti a varj problemi, a farne ancora alcune riguardanti alla forza della percossa ed alla sua esplicazione, ed ora appunto stava in procinto di arrecarne tra l'altre una, per quanto egli dice, assai ingegnosa e sottile.

Salv. Io mi reputo a gran ventura l'essermi incontrato nel Sig. Aproino, ed il poterlo conoscere di vista e di presenza, come per fama, e per molte relazioni del nostro Accademico, già aveva conosciuto; e di sommo piacere mi sarà il poter sentire almeno parte delle varie esperienze, che sopra diverse proposizioni furon fatte in casa l'amico nostro con l'intervento d'ingegni così accurati, quali sono quelli del Sig. Aproino e del Sig. Antonini, del quale con tante lodi ed ammirazioni mille volte mi parlò detto amico nostro. E perchè siamo ora qui per discorrere sopra il particolare della percossa, potrà V. S., Sig. Aproino, dirci quello che in tal materia ne trassero dalle esperienze, con promessa però di

arrecarne con altra occasione altre fatte sopra altri problemi, che so che non glie ne mancheranno, per la sicurezza che ho dell'essere l'Accademico nostro stato sempre non meno curioso che diligente sperimentatore.

Apr. Se io volessi con i debiti ringraziamenti pagare il debito, al quale la cortesia di V. S. mi obbliga, mi converrebbe spendere tante parole, che poco tempo o punto ci avanzerebbe di tutto il giorno per parlare dell' intrapresa materia.

Sagr. No no, Sig. Aproino, venghiamo pure a dar principio ai discorsi di dottrina, e lasciamo i complimenti di cerimonie ai cortigiani, ed io entro per sicurtà tra amendue loro della scambievole soddisfazione prodotta, per quanto basta, dalle brevi, ma candide e sincere loro offiziose parole.

Apr. Ancorchè io stimi di non essere per produr cosa ignota al Sig. Salviati, e che perciò tutta la carica del discorso doverebbe essere appoggiata sulle sue spalle, tuttavia, se non per altro, almeno per alleggerirlo in parte, andrò toccando quei primi motivi insieme con la prima esperienza che mossero l' amico ad internarsi nella contemplazione di questo ammirabile problema della percossa; cercando la maniera del poter trovare e misurare la sua gran forza, ed insieme, se fusse possibile, risolvere ne' suoi principj e nelle sue prime cause l' essenza di cotale effetto, il quale molto diversamente par che proceda nell' acquisto della sua somma potenza, dal modo nel quale procede la moltiplicazione di essa in tutte le altre macchine meccaniche (dico meccaniche per escludere l' immensò vigore del fuoco), nelle quali si scorge, ed assai concludentemente s' intende, come la velocità d' un debile movente compensa la gagliardia di un forte resistente, che lentamente venga mosso. Ma perchè si scorge pur anco nella operazione della percossa intervenire il movimento del percuziente, congiunto con la sua velocità, contro al movimento del resistente, ed il suo poco o molto dovere essere mosso; fu il primo concetto dell'Accademico di cercar d' investigare qual parte abbia nell' effetto ed operazione della percossa, v. g., il peso del martello, e quale la velocità maggiore o minore

con la quale vien mosso, cercando se fusse possibile di trovare una misura, la quale comunemente ci misurasse ed assegnasse l'una e l'altra energia. E per arrivare a tal cognizione immaginò una, per quanto a me parve, ingegnosa esperienza. Accomodò un' asta assai gagliarda e di lunghezza di circa tre braccia, volubile sopra un perno a guisa dell'ago di una bilancia; sospese poi nell' estremità delle braccia di cotal bilancia due pesi eguali ed assai gravi, uno de' quali era il composto di due vasi di rame, cioè di due secchie, l'una delle quali appesa all' estremità detta dell' ago, si teneva piena d' acqua, e dalle orecchie di tale secchia pendevano due corde di lunghezza circa due braccia l'una, alle quali era per gli orecchi attaccata un' altra simil secchia, ma vuota, la quale veniva a piombo a risponder sotto alla prima secchia già detta e piena d' acqua; nell' estremo poi dell' altro braccio della bilancia si faceva pendere un contrappeso di pietra, o di qual si fusse altra materia grave, il quale equilibrasse giustamente la gravità di tutto il composto delle due secchie, dell' acqua e delle corde. La secchia superiore era forata nel fondo con foro largo alla grossezza di un uovo o poco meno, e questo tal foro si poteva aprire e serrare. Fu la prima immaginazione e concetto comune di amendue noi, che fermata la bilancia in equilibrio, essendo preparato il tutto nella maniera detta, quando poi si sturasse la secchia superiore, e si desse l' andare all' acqua, la quale precipitando andasse a percuotere nella secchia da basso, l' aggiunta di cotal percossa dovesse aggiugnere tal momento in questa parte, che bisogno fusse, per restituire l' equilibrio, aggiugnere nuovo peso alla gravità del contrappeso dell' altro braccio, la quale aggiunta è manifesto che ristorerebbe e adeguerebbe la nuova forza della percossa dell' acqua; sì che potessimo dire, essere il suo momento equivalente al peso delle 10 o 12 libbre, che fusse stato di bisogno aggiugnere all' altro contrappeso.

Sagr. Ingegnoso veramente mi pare cotesto macchinamento, e sto con avidità attendendo l' esito di tale esperienza.

Apr. La riuscita, sì come agli altri fu inopinata, così fu

maravigliosa; imperocchè subito aperto il foro e cominciato ad uscirne l'acqua, la bilancia inclinò dall'altra parte del contrappeso, ma non tantosto arrivò l'acqua percuotendo nel fondo dell'inferior secchia, che restando di più inclinarsi il contrappeso, cominciò a sollevarsi, e con un moto placidissimo, mentre l'acqua precipitava, si ricondusse all'equilibrio, e quivi, senza passarlo pur di un capello, si librò, e fermossi perpetuamente.

SAGR. Inaspettato veramente m'è stato l'esito di questo caso, e benchè il successo sia stato diverso da quello che io mi aspettava, e dal quale pensava di potere imparare quanta fusse la forza di tal percossa, nulladimeno mi par potere conseguire in buona parte la desiderata notizia, dicendo che la forza ed il momento di cotal percossa equivale al momento ed al peso di quella quantità d'acqua cadente che si trova sospesa in aria tra le due acque delle due secchie, superiore ed inferiore, la qual quantità d'acqua non gravita punto, nè contro alla secchia superiore, nè contro all'inferiore; non contro alla superiore, perchè non essendo le parti dell'acqua attaccate insieme, non possono le basse far forza e tirar giù le superiori, come farebbe, v. g., una materia viscosa, come pece o pania; non contro all'inferiore, perchè andandosi continuamente accelerando il moto della cadente acqua, non possono le parti più alte gravitare o premere sopra le più basse; laonde ne segue che tutta l'acqua contenuta nella troscia è come se non fusse in bilancia. Il che anco più che chiaramente si manifesta, perchè se tal acqua esercitasse sua gravità sopra le secchie, queste con la giunta della percossa grandemente inclinerebbero a basso, sollevando il contrappeso, il che non si vede seguire. Confermasi anco puntualissimamente questo, perchè se noi c'immagineremo tutta quell'acqua repentinamente agghiacciarsi, già la troscia fatta un solido di ghiaccio peserebbe con tutto il resto della macchina, e cessando il moto, verrebbe tolta la percossa.

APR. Il discorso di V. S. è puntualmente conforme a quello che facemmo noi di subito sopra la veduta esperienza; ed a noi ancora parve di poter concludere, che l'operazione della

sola velocità acquistata per la caduta di quella quantità di acqua dall' altezza delle due braccia, operasse nell' aggravare, senza il peso dell' acqua, quel medesimo appunto che il peso dell' acqua senza l' impeto della percossa, sì che quando si potesse misurare e pesare la quantità dell' acqua compresa in aria tra i vasi, si potesse sicuramente affermare, la tal percossa esser potente ad operare, gravitando, quello che opera un peso eguale a 10 o 12 libbre dell' acqua cadente.

SALV. Piacemi molto l' arguta invenzione, e parmi che senza il partirci dal suo progresso, nel quale ci arreca qualche ambiguità la difficoltà del misurare la quantità dell' acqua cadente, potremmo con una non dissimile esperienza agevolarci la strada per arrivare all' intera cognizione che desideriamo. Però figurandoci per esempio uno di quei gran pesi, che per ficcare grossi pali nel terreno si lasciano cadere da qualche altezza sopra uno de' detti pali (i quali pesi mi pare che gli addimandino berte), ponghiamo, v. g., il peso di una tal berta esser 100 libbre, l' altezza dalla quale cade essere quattro braccia, e la fitta del palo nel terreno duro fatta per una sola percossa importare 4 dita; e posto che la medesima pressura e fitta delle 4 dita, volendola noi far senza percossa, ricercasse che le fusse soprapposto un peso di mille libbre (il quale operando con la sola gravità senza moto precedente chiameremo peso morto), domando se noi potremo senza equivocazione o fallacia affermare, la forza ed energia di un peso di 100 libbre, congiunto con la velocità acquistata nel cadere dall' altezza di quattro braccia, essere equivalente al gravitare di un peso morto di mille libbre, sì che la virtù della sola velocità importasse quanto la pressura di libbre novecento di peso morto, che tante ne rimangono, trattene dalle mille le cento della berta? Vedo che amendue tardate la risposta, forse perchè bene non ho esplicata la mia domanda; però torno a brevemente dire, se possiamo per la detta sperienza asserire che l' aggravio del peso morto farà sempre il medesimo effetto sopra una resistenza, che fa il peso di 100 libbre cadente dall' altezza di quattro braccia, in guisa tale che (per più chiara esplicazione) cadendo l' istessa berta dalla mede-

sima altezza, ma percuotendo sopra un più resistente palo, non lo cacciasse più che due dita, se possiamo tenerci sicuri che l'istesso effetto facesse solo col gravitare il peso morto delle mille libbre; dico di cacciare il palo le due dita?

Apr. Io non penso che, almeno a prima fronte, ciò non fusse conceduto da ciascheduno.

Salv. E voi, Sig. Sagredo, ci mettereste sopra qualche dubbio?

Sagr. Per ora veramente no, ma l'avere per molte e molte esperienze provato quanto sia facile l'ingannarsi, non mi rende così baldanzoso che del tutto mi spogli di timore.

Salv. Ora poi che V. S, la cui perspicacia ho in mille e mille occasioni conosciuta acutissima, si mostra d'inclinare ad ammettere la parte falsa, ben posso credere che tra mille difficile sarebbe d'incontrarne uno o due, che in una fallacia tanto simile al vero non incappassero. Ma quello che più vi farà maravigliare sarà quando vedrete la fallacia esser sotto così sottil velo ricoperta, che ogni leggier vento poteva esser bastante a discoprirla e palesarla, e pure ne resta ella velata e ascosa. Torniamo dunque a far cadere nel primo modo sopraddetto la berta sul palo, cacciandolo sotto quattro dita, e sia vero che per ciò fare si ricercassero puntualmente le mille libbre di peso morto; torniamo di più a sollevare alla medesima altezza l'istessa berta, la quale cadendo la seconda volta sopra il medesimo palo, lo cacci solamente due dita, per avere, v. g., incontrato il terreno più sodo: dobbiamo noi stimare, che altrettanto lo ricacciasse la pressura dell'istesso peso morto delle mille libbre?

Apr. Parmi che sì.

Sagr. Ah Sig. Paolo, miseri noi, bisogna dire risolutamente che no; imperocchè se nella prima posata il peso morto delle mille libbre cacciò il palo quattro dita, e non più, perchè volete che l'avernelo tolto solamente, e poi rimessoglielo sopra, torni a cacciarlo due altre dita? e perchè non lo cacciò prima che ne fusse levato mentre già gli era addosso? Volete che lo smontarlo solamente, e il riposatamente riporvelo, gli faccia fare quello che prima non potette?

Apr. Io non posso se non arrossire, e dichiararmi d'essere stato in pericolo di sommergermi in un bicchier d'acqua.

Salv. Non vi sbigottite, Sig. Aproino, perchè vi assicuro che avete avuto molti compagni in rimanere allacciato in nodi per altro di facilissima scioglitura; e non è dubbio che ogni fallacia sarebbe per sua natura d'agevole scoprimento, quando altri ordinatamente l'andasse sviluppando e risolvendo ne' suoi principj, de'quali esser non può che alcun suo contiguo, o poco lontano, non si scopra apertamente falso. Ed in questa parte, di ridurre con pochissime parole ad assurdi ed inconvenienti palpabili, conclusioni false, e state sempre credute per vere, ha il nostro Accademico avuto certo particolar genio. Ed io ho una raccolta di molte e molte conclusioni naturali, state sempre trapassate per vere, e da esso poi con brevi e facilissimi discorsi manifestate false.

Sagr. Questa veramente ne è una, e se l'altre saranno su questo andare, sarà bene che a qualche tempo ce le partecipiate; ma intanto per ora seguitiamo l'intrapresa materia. Ed essendo che noi siamo sul cercare il modo (se alcuno ve ne ha) di regolare ed assegnare misura giusta e nota alla forza della percossa, questo non mi par che conseguir si possa col mezzo dell'assegnata sperienza. Imperocchè reiterando i colpi della berta sopra il palo, e per ciascheduno ricacciandolo continuamente più e più, come la sensata esperienza ne mostra, si fa chiaro che ciascheduno de' conseguenti colpi lavora; il che non accade nel peso morto, il quale avendo operato quello che fece la prima pressura, non seguita di fare l'effetto della seconda, cioè di cacciare ancor di nuovo il palo, quando vi si riponga sopra, anzi apertamente si vede che per la seconda rifitta ci vuol peso maggiore di mille libbre; e se si vorranno pareggiare con pesi morti le fitte del terzo, quarto e quinto colpo, ec., ci vorranno le gravità di pesi morti continuamente maggiori e maggiori: or quale di queste doveremo noi prender per ferma e certa misura della forza del colpo, che pur quanto a sè stesso è sempre il medesimo?

Salv. Questa è delle prime maraviglie che indubitabilmente credo che debbano avere tenuti perplessi ed irresoluti

gl' ingegni speculativi. E veramente a chi non giugnerà nuovo il sentire che la misura della forza della percossa si debba prendere non da quello che percuote, ma più presto da quello che la percossa riceve? E quanto all' addotta esperienza, pare che da lei ritrar si possa, la forza della percossa essere infinita, o vogliam dire indeterminata o indeterminabile, e farsi ora minore ed ora maggiore, secondo che ella viene applicata ad una maggiore o minore resistenza.

SAGR. Già mi pare di comprendere che vero possa essere, la forza della percossa essere immensa o infinita; imperocchè stando nella proposta esperienza, e dato che il primo colpo cacciasse il palo quattro dita e il secondo tre, e continuandosi d' incontrare sempre il terreno più duro, il terzo colpo vi cacci il palo due dita, il quarto uno e mezzo, conseguentemente un sol dito, un mezzo, un quarto, ec., pare che, quando per la durezza del terreno la resistenza del palo non si faccia infinita, il colpo reiterato sempre caccierà perpetuamente il palo, ma bene per ispazj minori e minori; ma perchè, sia quanto si voglia breve lo spazio, è egli però divisibile e suddivisibile sempre, si continueranno le fitte; e perchè la seguente, dovendosi fare con l' aggravio di peso morto, richiede peso maggiore che l' antecedente, potrà essere che per pareggiare le forze dell' ultime percosse si ricerchi peso maggiore e maggiore in immenso.

SALV. Così crederei io veramente.

APR. Non potrà dunque essere resistenza alcuna così grande che resti salda e contumace contro al potere di alcuna percossa benchè leggera?

SALV. Penso di no, se quello in che si percuote non è del tutto immobile, cioè non è la sua resistenza infinita.

SAGR. Mirabili, e per modo di dire prodigiosi pajono questi asserti e che l' arte in questo solo effetto superi e defraudi la natura, cosa che nella prima apparenza par che facciano altri strumenti meccanici ancora, alzandosi gravissimi pesi con poca forza in virtù della leva, della vite, della taglia ed altri: ma in questo effetto della percossa, che pochi colpi di martello non più pesante di 10 o 12 libbre abbiano ad am-

maccare, v. g., un dado di rame, il quale non infrangerebbe nè ammaccherebbe il carico non solo di una vastissima guglia di marmo, ma nè anco una torre altissima che sopra il martello si posasse, eccede, pare a me, ogni natural discorso che tentasse di torne la maraviglia: però, Sig. Salviati, mettete mano al filo e cavateci di così intrigati laberinti.

Salv. Da quanto le SS. VV. producono, pare che il nodo principale della difficoltà batta qua, che non bene si comprenda come l'operazione della percossa, sempre infinita, non debba di necessità procedere per mezzi diversi da quelli di altre macchine, che con pochissima forza superano resistenze immense. Tuttavia io non dispero di poter esplicare come in questa ancora si procede nella medesima maniera. Tenterò di spiegarne il processo; e benchè mi paja assai complicato, forse il mio dire potrebbe dal vostro dubitare ed opporre assottigliarsi ed acuirsi tanto, che allargasse almeno, se non del tutto sciogliesse il nodo. È manifesto, la facultà della forza del movente o della resistenza del mosso non essere una e semplice, ma composta di due azioni, dalle quali la loro energia dee essere misurata; l'una delle quali è il peso sì del movente come del resistente, e l'altra è la velocità secondo la quale quello dee muoversi e questo esser mosso. E così quando il mosso dee muoversi con la velocità del movente, cioè che gli spazj passati da amendue nell'istesso tempo siano uguali, impossibile sarà che la gravità del movente sia minore di quella del mosso, ma sibbene alquanto maggiore, attesochè dalla puntuale egualità nasce l'equilibrio e la quiete, come si vede nella bilancia di braccia eguali. Ma se noi vorremo con peso minore sollevarne un maggiore, bisognerà ordinar la macchina in modo, che il peso movente minore si muova nell'istesso tempo per ispazio maggiore dell'altro peso, che è quanto a dire che quello più velocemente si muova di questo; e così di già la ragione, non meno che l'esperienza, ci mostra che per esempio nella stadera, acciocchè il peso del romano possa alzarne un altro 10 o 15 volte di lui più grave, bisogna che la sua lontananza nell'ago sia lontana dal centro, intorno al quale si fa il moto, 10 o 15 volte più che la di-

stanza tra il medesimo centro ed il punto della sospensione dell'altro peso; che è il medesimo che dire, che la velocità del movente sia 10 o 15 volte maggiore della velocità del mosso. E perchè questo si scorge accadere in tutti gli altri strumenti, possiamo con sicurezza stabilire che le gravità e velocità con l'istessa proporzione, ma alternatamente prese si rispondano.

Generalmente adunque diciamo, il momento del men grave pareggiare il momento del più grave, quando la velocità del minore alla velocità del maggiore abbia l'istessa proporzione che la gravità del maggiore a quella del minore, al quale ogni poco vantaggio che si conceda, supera l'equilibrio, e si introduce il moto. Fermato questo, io dico che non solamente nella percossa la sua operazione pare infinita circa il superare qualsivoglia somma resistenza, ma tale si mostra ella in qualsivoglia altro meccanico ordigno; perchè non è egli manifesto che un piccolissimo peso di una libbra scendendo alzerà un peso di 100 e di 1000 e più quanto ne piace, se noi lo costituiremo nell'ago della stadera cento o mille volte più lontano dal centro che l'altro peso massimo, cioè se noi faremo che lo spazio, per lo quale scenderà quello, sia cento e mille e più volte maggiore dello spazio della salita dell'altro, cioè se la velocità di quello sia cento e mille volte maggiore della velocità di questo? Ma voglio con uno più arguto esempio farli toccar con mano, come qualsivoglia piccolissimo peso scendendo faccia salire qualsivoglia immensa e gravissima mole. Intenda V. S. un tal vastissimo peso essere attaccato a una corda fermata in luogo stabile e sublime, intorno al quale, come centro, intenda esser descritta la circonferenza di un cerchio che passi pel centro di gravità della sospesa mole, il qual centro di gravità è noto che viene a perpendicolo sotto la corda della sospensione, o per meglio dire, è in quella retta linea che dal punto della sospensione va a terminare nel centro comune di tutti i gravi, cioè nel centro della Terra. Immaginatevi poi un altro filo sottilissimo, al quale sia attaccato qualsivoglia peso benchè minimo, in guisa che il centro di gravità di questo termini nella già immaginata circonferenza; e ponete questo piccolo peso andare

a toccare e semplicemente appoggiarsi a quella vasta mole: non credete voi che, aggiunto per fianco, questo nuovo peso spignerà alquanto quel massimo, separando il suo centro di gravità dalla già immaginata linea perpendicolare, nella quale prima si trovava, e senza dubbio si moverà per la circonferenza già detta, e movendovisi si separerà dalla linea orizzontale, che è la tangente di detta circonferenza nell' imo punto, dove si trovava esso centro di gravità della gran mole? E quanto allo spazio, tanto sarà l' arco passato dal gravissimo, quanto il passato dal piccolissimo peso, che al grandissimo si appoggiava; ma non sarà già la salita del centro del peso massimo eguale alla scesa del centro del peso minimo, perchè questo scende per un luogo o spazio molto più inclinato che non è quello della salita dell' altro centro, che vien fatta dal contatto del cerchio, in certo modo, secondo un angolo minore di ogni acutissimo. Qui se io avessi a trattare con persone men versate di voi nella geometria, dimostrerei, come partendosi un mobile dall' imo punto del contatto, può benissimo essere che l' alzamento dalla linea orizzontale di qualche punto della circonferenza separato dal contatto, sia secondo qualsivoglia proporzione minore dell'abbassamento di un' asse a questo eguale, preso in qualsivoglia altro luogo, purchè in esso non si contenga il contatto. Ma voi son sicuro che in ciò non avete dubbio. E se il semplice appoggiarsi del piccol peso alla gran mole può muoverla ed alzarla, che sarà se discostandolo e lasciandolo scorrere per la circonferenza egli vi anderà a percuotere?

Apr. Veramente non mi pare che ci resti più luogo di dubitare, la forza della percossa essere infinita, per quanto l' addotta esperienza ne dichiara; ma tal notizia non basta al mio intelletto a schiarirmi molte oscure tenebre, le quali lo tengono offuscato in modo, che non discerno come il negozio di queste percosse cammini, sì che io potessi rispondere ad ogni dubbio che mi fusse promosso.

Salv. Ma prima che io passi più oltre, voglio scoprirvi un certo equivoco, che sta nascoso e come in aguato, e ci lascia stimare tutti quei colpi, con i quali nel soprapposto

esempio si andava cacciando il palo, esser eguali o vogliamo dire gl' istessi, sendo fatti dalla medesima berta elevata sopra il palo sempre alla medesima altezza, il che non è vero. Per intelligenza di che, figuratevi di andare ad incontrare con la mano una palla che venga scendendo da alto, e ditemi se nell'arrivare ella sopra la vostra mano voi la mano andaste abbassando per la medesima linea e con la medesima velocità che scende la palla, ditemi, dico, qual percossa voi sentireste? certo nessuna. Ma se all' arrivo della palla voi andaste solamente in parte cedendo, con abbassar la mano con minor velocità di quella della palla, voi bene ricevereste percossa, ma non come da tutta la velocità della palla, ma solamente come dall'eccesso della velocità di quella sopra la velocità della cedenza della mano; sì che quando la palla scendesse con 10 gradi di velocità, e la mano scendesse con otto, il colpo sarebbe come fatto da due gradi di velocità della palla, e cedendo la mano con 4 il colpo sarebbe come di 6, ed essendo il cedere come uno, il percuoter sarebbe come di 9, e tutta l'intera percossa della velocità de' 10 gradi sarebbe quella che percotesse sopra la mano che nulla cedesse. Applicando ora il discorso alle percosse della berta, mentre il palo cede la prima volta 4 dita, e la seconda 2, e la terza un sol dito all' impeto della berta, le percosse rimangono disuguali, e la prima più debole della seconda, e la seconda più della terza, secondo che la cedenza delle 4 dita più detrae dalla velocità del primo colpo che la seconda, e questa è più debole della terza, come quella che toglie il doppio più di questa dalla medesima velocità. Se dunque il molto cedere del palo alla prima percossa, ed il meno cedere alla seconda, e meno anco alla terza, e così sempre continuatamente, è cagione che men valido sia il primo colpo del secondo, e questo del terzo, che maraviglia è che manco quantità di peso morto si ricerchi per la prima cacciata delle 4 dita, e che maggiore ne bisogni per la seconda cacciata delle due dita, e maggiore ancora per la terza e sempre più e più continuatamente, secondo che le cacciate si vanno diminuendo nelle diminuzioni delle cedenze del palo, che è quanto a dire

nell' augumento delle resistenze? Da quanto ho detto mi pare che agevolmente si possa raccorre, quanto malagevolmente si possa determinare sopra la forza della percossa fatta sopra un resistente, il quale vada variando la cedenza, quale è il palo, che indeterminatamente va più e più resistendo: laonde stimo che sia necessario l'andar contemplando sopra tale, che ricevendo le percosse, a quelle sempre con la medesima resistenza si opponga. Ora per istabilire tal resistente, voglio che ci figuriamo un solido grave, per esempio, di mille libbre di peso, il quale posi sopra un piano che lo sostenti; voglio poi che intendiamo una corda a cotal solido legata, la quale cavalchi sopra una carrucola fermata in alto per buono spazio sopra detto solido. Qui è manifesto, che aggiugnendo forza traente in giù all' altro capo della corda, nel sollevar quel peso si averà sempre una egualissima resistenza, cioè il contrasto di mille libbre di gravità; e quando da quest' altro capo si sospenda un altro solido egualmente pesante come il primo, verrà da essi fatto l' equilibrio, e stando sollevati, senza che sopra alcuno sottoposto sostegno si appoggino, staranno fermi, nè scenderà questo secondo grave alzando il primo, salvo che quando egli abbia qualche eccesso di gravità. E se riposeremo il primo peso sopra il soggetto piano che lo sostenga, potremo far prova con altri pesi di diversa gravità (ma ciascheduna minore del peso che riposa in quiete) quali siano le forze di diverse percosse, con legare alcuno di questi pesi all' altro capo della corda, lasciandolo da qualche altezza cadere, ed osservando quello che segue nell' altro gran solido nel sentir la strappata dell' altro peso cadente, la quale strappata sarà ad esso gran peso come un colpo che lo voglia cacciare in su. Qui primieramente mi pare che si raccolga, che per piccola che sia la gravità del peso cadente, doverà senz' altro superare la resistenza del peso gravissimo ed alzarlo; la qual conseguenza mi par che si tragga molto concludentemente dalla sicurezza che abbiamo, come un peso minore prevalerà ad un altro quanto si voglia maggiore, qualunque volta la velocità del minore abbia maggior proporzione alla velocità del maggiore, che non ha la gravità del maggiore alla

gravità del minore: ma ciò segue nel presente caso, nel quale la velocità del peso cadente supera d'infinito intervallo quella dell'altro peso, la quale è nulla, posando egli in quiete: ma non già è nulla la gravità del solido cadente, in relazione alla gravità dell'altro, non ponendo noi questa infinita, nè quella nulla: supererà dunque la forza di questo percuziente la resistenza di quello in cui si impiega la percossa. Seguita ora che cerchiamo d'investigare quanto sia per essere lo spazio, al quale la ricevuta percossa lo solleverà, e se forse questo risponda a quello degli altri strumenti meccanici; come, per esempio, nella stadera si vede l'alzamento del peso grave esser quella tal parte dello abbassamento del romano, quale è il peso del romano dell'altro peso maggiore; e così nel caso nostro bisogna che vediamo, se essendo la gravità del gran solido posto in quiete, per esempio, mille volte maggiore della gravità del peso cadente, il quale caschi dall'altezza, v. g., di un braccio, egli sia alzato da questo minore un centesimo di braccio, che così pare che venisse osservata la regola degli altri istrumenti meccanici. Figuriamoci di fare la prima esperienza col far cadere da qualche altezza, diciamo di un braccio, un peso eguale all'altro, che ponghiamo posare sopra un piano, essendo amendue tali pesi legati, l'uno all'un capo e l'altro all'altro capo dell'istessa corda; che crediamo noi che sia per operare la strappata del peso cadente circa il muovere e sollevar l'altro che era in quiete? Io volentieri sentirei l'opinione vostra.

Apr. Poichè V. S guarda verso di me, comecchè da me ella attenda la risposta, mi pare che essendo amendue i solidi egualmente gravi, ed avendo il cadente di più l'impeto della velocità, l'altro ne doverà esser innalzato assai sopra l'equilibrio, imperocchè per ridurlo in bilancio la sola gravità di quello era bastante; sormonterà dunque, per mio credere, il peso ascendente per molto maggiore spazio di un braccio, che è la misura della scesa del cadente.

Salv. Che dice V. S., Sig. Sagredo?

Sagr. Il discorso mi pare assai concludente nel primo aspetto; ma, come poco fa dissi, le molte esperienze mi hanno

insegnato quanto sia facile l'ingannarsi, e però sia necessario l'andar circospetto prima che risolutamente pronunziare ed affermare alcun detto. Dirò dunque (però sempre dubitando) che è vero che il peso, v. g., delle 100 libbre del grave descendente basta per alzare l'altro, che pure pesi 100 libbre, insino allo equilibrio, senza che quello venga instrutto e fornito d'altra velocità, e basterà solo l'eccesso di mezza oncia; ma vo considerando che questa equilibrazione verrà fatta con gran tardità, dove che quando il cadente sopraggiunga con gran velocità, con una simile bisognerà che tiri in alto il suo compagno. Ora non mi pare che sia dubbio, che maggior forza ci voglia a cacciar con gran velocità un grave all'insù, che a spingervelo con gran lentezza, onde possa accadere che il vantaggio della velocità guadagnata dal cadente nella libera caduta di un braccio, possa rimaner consunto e, per modo dire, spento nel cacciar l'altro con altrettanta velocità ad altrettanta altezza; perlochè non sarei lontano dal credere che tali due movimenti in giù ed in su terminassero in quiete immediatamente dopo la salita di un braccio, che sarebbero due braccia di scesa dell'altro, computandovi il primo braccio, che questo scese libero e solo.

Salv. Io veramente inclino a credere questo stesso, perchè sebbene il peso cadente è un aggregato di gravità e di velocità, l'operazione della gravità nel sollevar l'altro è nulla, avendo a sè opposta e renitente altrettanta gravità dell'altro peso, il quale è manifesto che mosso non sarebbe senza l'aggiunta all'altro di qualche piccola gravità: l'operazion dunque, per la quale il peso cadente dee sollevar l'altro, è tutta della velocità, la quale altro che velocità non può conferire; nè potendo conferirne altra che quella che egli ha, e non avendo altro che quella che, partendosi dalla quiete, ha guadagnato nello spazio della scesa di un braccio, per altrettanto spazio e con altrettanta velocità spignerà l'altro all'insù, conformandosi con quello che in varie esperienze si può riconoscere, che è, che il grave cadente partendosi dalla quiete si trova in ogni sito aver tant'impeto, che basta per ridurre sè stesso alla medesima altezza.

Sagr. In quel modo che ora mi sovviene accadere in un grave pendente da un filo che sia fermato in alto, il qual grave rimosso dal perpendicolo per un arco di qualsivoglia grandezza, non maggiore di una quarta, lasciato in libertà scende e trapassa oltre al perpendicolo, salendo altrettanto arco quanto fu quello della scesa; dove è manifesto, la salita derivar tutta dalla velocità appresa nello scendere; imperciocchè nel montare in su niuna parte vi può avere la gravità del mobile, ma bene repugnando questa alla salita, va spogliando esso mobile di quella velocità, della quale nella scesa lo veste.

Salv. Se l'esempio di quello che fa il solido grave appeso al filo, del quale mi sovviene che parlammo ne' discorsi de' giorni passati, quadrasse e si aggiustasse così bene al caso del quale noi di presente trattiamo, come ei si aggiusta alla verità, molto concludente sarebbe il discorso di V. S ; ma non piccola discrepanza trovo io tra queste due operazioni, dico tra quella del solido grave pendente dal filo, che lasciato da qualche altezza, scendendo per la circonferenza del cerchio, acquista impeto di trasportare sè medesimo ad altrettanta altezza, e l'altra operazione del cadente legato ad un capo della corda per innalzare l'altro a sè eguale in gravità; imperocchè lo scendente per lo cerchio va acquistando velocità sino al perpendicolo favorito dalla propria gravità, la quale trapassato il perpendicolo lo disajuta nel dover ascendere (che è moto contrario alla gravità), sì che dello impeto acquistato nella scesa naturale non piccola ricompensa è il ricondurlo con moto preternaturale o per altezza. Ma nell'altro caso sopraggiugne il grave cadente al suo eguale posto in quiete, non solamente con la velocità acquistata, ma con la sua gravità ancora, la quale mantenendosi leva per sè sola ogni resistenza di essere alzato all' altro suo compagno, perlochè la velocità acquistata non trova contrasto di un grave che allo andare in su faccia resistenza; talchè se come l'impeto conferito all' ingiù ad un grave non trova in esso ragione di annichilarsi o ritardarsi, così non si ritrova in quello ascendente, la cui gravità rimane nulla, essendo contrappesata dal

descendente. E qui mi pare che accada per appunto quello che accade ad un mobile grave e perfettamente rotondo, il quale se si porrà sopra un piano pulitissimo ed alquanto inclinato, da per sè stesso naturalmente vi scenderà, acquistando sempre velocità maggiore; ma se per l'opposito dalla parte bassa si vorrà quello cacciare in su, ci bisognerà conferirgli impeto, il quale si anderà sempre diminuendo, e finalmente annichilando; ma se il piano non sarà inclinato, ma orizzontale, tal solido rotondo postovi sopra farà quello che piacerà a noi, cioè se ve lo metteremo in quiete, in quiete si conserverà, e dandogli impeto verso qualche parte, verso quella si moverà, conservando sempre l'istessa velocità che dalla nostra mano averà ricevuta, non avendo azione nè di accrescerla, nè di scemarla, non essendo in tal piano nè declività, nè acclività; ed in simile guisa i due pesi eguali pendenti da due capi della corda, ponendogliene in bilancio, si quieteranno, e se ad uno si darà impeto all'ingiù, quello si andrà conservando equabile sempre. E qui si dee avvertire che tutte queste cose seguirebbero quando si rimovessero tutti gli esterni ed accidentari impedimenti, dico di asprezza e gravità di corda, di girelle e di stroppicciamenti nel volgersi intorno al suo asse, ed altri che ve ne potessero essere: ma perchè si è fatta considerazione della velocità, la quale l'uno de' due pesi eguali acquista scendendo da qualche altezza mentre l'altro posi in quiete, è bene determinare quale e quanta sia per essere la velocità, con la quale siano per muoversi poi amendue dopo la caduta dell'uno, scendendo questo e salendo quello. Già, per le cose dimostrate, noi sappiamo che quel grave, che partendosi dalla quiete liberamente scende, acquista tuttavia maggiore e maggior grado di velocità perpetuamente, sì che nel caso nostro il grado massimo di velocità del grave, mentre liberamente scende, è quel che si trova avere nel punto, che egli comincia a sollevare il suo compagno, ed è manifesto che tal grado di velocità non si andrà più augumentando essendo tolta la cagione dello augumento, che era la gravità propria di esso grave descendente, la quale non opera più, essendo tolta la sua propensione di

scendere dalla repugnanza di salire di altrettanto peso del suo compagno. Si conserverà dunque il detto grado massimo di velocità, ed il moto di accelerato si convertirà in equabile. Quale poi sia per essere la futura velocità, è manifesto dalle cose dimostrate e vedute ne' passati giorni, cioè che la velocità futura sarà tale, che in altrettanto tempo, quanto fu quello della scesa, si passerà doppio spazio di quello della caduta.

Sagr. Meglio dunque di me aveva filosofato il Sig. Aproino, e sin qui resto molto bene appagato del discorso di V. S., ed ammetto per verissimo quanto mi ha detto; ma per ancora non mi sento aver fatto acquisto tale, che mi basti per levare l'eccessiva maraviglia che sento nel vedere essere superate resistenze grandissime dalla virtù della percossa del percuziente, ancorchè nè molta sia la sua gravità, nè eccessiva la sua velocità; e quello che ne accresce lo stupore è il sentire che ella afferma, nessuna essere la resistenza (salvo che se fusse infinita) che al colpo possa resistere senza cedere; e più, che di tal percossa non si possa in veruna maniera assegnare una determinata misura: però il desiderio nostro sarebbe che V. S. mettesse mano a dilucidare queste tenebre.

Salv. Essendo che non si può applicare dimostrazione alcuna sopra una proposizione, della quale il dato non sia uno e certo, però volendo noi filosofare intorno la forza di un percuziente e la resistenza di quello che la percossa riceve, bisogna che prendiamo un percuziente la cui forza sia sempre l'istessa, quale è quella del medesimo grave cadente sempre dalla medesima altezza; e parimente stabiliscbiamo un ricevitore del colpo, la cui resistenza sia sempre la medesima. E per averlo tale, voglio (stando su l'esempio di sopra dei due gravi pendenti da' capi dell'istessa corda) che percuziente sia il piccol grave che si lascia cadere, e che l'altro, quanto si voglia maggiore, sia quello, nell'alzamento del quale venga esercitato l'impeto del piccolo cadente; dove è manifesto, la resistenza del grande esser sempre ed in tutti i luoghi la medesima cosa, il che non accade nella resistenza

del chiodo o del palo, ne' quali ella va sempre crescendo nel penetrare, e con proporzione ignotissima per gli accidenti varj che s' interpongono di variate durezze nel legno e nel terreno ec., ancorchè il chiodo ed il palo siano sempre i medesimi. In oltre è necessario che ci riduchiamo a memoria alcune conclusioni vere, delle quali si parlò a' giorni passati nel trattato del moto; e sia la prima di esse, che i gravi descendenti da un punto sublime sino a un soggetto piano orizzontale, acquistano eguali gradi di velocità, sia la scesa loro fatta o nella perpendicolare o sopra qualsivogliano piani diversamente inclinati; come, per esempio, essendo AB (*Fig.* 146) un piano orizzontale, sopra il quale dal punto C caschi la perpendicolare CB, e dal medesimo C altre diversamente inclinate CA, CD, CE, dobbiamo intendere i gradi di velocità de' cadenti dal punto sublime C, per qualsivoglia delle linee che dal punto C vanno a terminare nell' orizzontale, essere tutti eguali. In oltre si dee nel secondo luogo supporre, l'impeto acquistato in A dal cadente dal punto C esser tanto quanto appunto si ricercherebbe per cacciare in alto il medesimo cadente o altro a lui eguale sino alla medesima altezza; onde possiamo intendere, che tanta forza bisogna per sollevar dall' orizzonte sino all' altezza C l'istesso grave, venga egli cacciato da qualsivoglia de' punti A, D, E, B. Riduchiamoci nel terzo luogo a memoria, che i tempi delle scese per i notati piani inclinati hanno tra di loro la medesima proporzione che le lunghezze di essi piani; sì che quando, per esempio, il piano AC fusse lungo il doppio del CE, e quadruplo del CB, il tempo della scesa per CA sarebbe doppio del tempo della scesa per CE, e quadruplo della caduta per CB. In oltre ricordiamoci, che per far montare, o vogliam dire per strascicare l' istesso peso sopra i diversi piani inclinati, sempre minor forza basta per muoverlo sopra il più inclinato che sopra il meno, secondo che la lunghezza di questo è minore della lunghezza di quello. Ora, stante questi veri supposti, finghiamoci il piano AC (*Fig.* 147) esser, v. g., dieci volte più lungo del perpendicolo CB, e sopra esso AC esser posato un solido S, pesante cento libbre: è manifesto che se

a tal solido fusse attaccata una corda, la quale cavalcasse sopra una girella posta più alta del punto C, la qual corda nell'altro suo capo avesse attaccato un peso di 10 libbre, qual sarebbe il peso P, è manifesto che tal peso P, con ogni poco di giunta di forza, scendendo tirerebbe il grave S sopra il piano AC. E qui si dee notare, che sebbene lo spazio per lo quale il maggior peso si muove sopra il suo piano soggetto, è eguale allo spazio per lo quale si muove il piccolo descendente (onde alcuno potrebbe dubitare sopra la generale verità di tutte le meccaniche proposizioni, cioè che piccola forza non supera e muove gran resistenza, se non quando il moto di quella eccede il moto di questa con la proporzione contrariamente rispondente ai pari loro), nel presente caso la scesa del piccolo peso, che è a perpendicolo, si dee paragonare con la salita a perpendicolo del gran solido S, vedendo quanto egli dalla orizzontale perpendicolarmente si solleva; cioè si dee riguardare quanto ei monta nella perpendicolare BC (1).

Avendo io poi fatto diverse meditazioni circa il distendere quello che mi resta a dire, e che è la somma del presente negozio, fermo la seguente conclusione, per esser di poi esplicata e dimostrata.

Proposizione.

Se l'effetto che fa una percossa del medesimo peso, e cadente dalla medesima altezza, caccerà un resistente di resistenza sempre eguale per qualche spazio, e che per fare un simile effetto ci bisogni una determinata quantità di peso morto, che senza percossa prema; dico che quando il medesimo percuziente sopra un altro resistente maggiore con tal percossa lo caccerà, v. g, per la metà dello spazio che fu cacciato l'altro, per far questa seconda cacciata non basta la pressura del detto peso morto, ma ve ne vuole altro il dop-

(1) Avverta il Lettore che il discorso seguente non bene sarà connesso con le cose supposte di sopra, perchè l'Autore ha avuto pensiero di distenderlo diversamente da quello che aveva in animo quando si notarono le sopraddette conclusioni. (*Nota degli Editori del* 1718).

pio più grave; e così in tutte le altre proporzioni, quanto una cacciata fatta dal medesimo percuziente è più breve, tanto per l'opposito, con proporzione contraria, vi si ricerca, per far l'istesso, gravità maggiore di peso morto premente. Intendasi la resistenza, stando nel medesimo esempio del palo, esser tale che non possa esser superata da meno di cento libbre di peso morto premente, e che il peso del percuziente sia solamente dieci libbre, e che cadendo dall'altezza, v. g., di quattro braccia, cacci il palo quattro dita. Qui primieramente è manifesto che il peso delle dieci libbre, dovendo calare a perpendicolo, sarà bastante di far montare un peso di libbre cento sopra un piano inclinato tanto, che la sua lunghezza sia decupla della sua elevazione, per le cose dichiarate di sopra, e che tanta forza ci vuole in alzare a perpendicolo dieci libbre di peso, che nell'alzarne cento sopra un piano di lunghezza decupla alla sua perpendicolare elevazione; e però se l'impeto, che acquista il cadente per qualche spazio a perpendicolo, si applichi a sollevare un altro a sè eguale in resistenza, e' lo solleverà per altrettanto spazio; ma eguale è alla resistenza del cadente di dieci libbre a perpendicolo quella dell'ascendente di cento libbre sopra il piano di lunghezza decuplo alla sua perpendicolare elevazione; adunque, caschi il peso di dieci libbre per qualsisia spazio perpendicolare, l'impeto suo acquistato, ed applicato al peso di cento libbre, lo caccerà per altrettanto spazio sopra il piano inclinato, al quale spazio risponde l'altezza perpendicolare grande, quanto è la decima parte di esso spazio inclinato. E già si è concluso di sopra che la forza potente a cacciare un peso sopra un piano inclinato è bastante a cacciarlo anche nella perpendicolare che risponde all'elevazione di esso piano inclinato, la qual perpendicolare nel presente caso è la decima parte dello spazio passato sull'inclinata, il quale è eguale allo spazio della caduta del primo peso di dieci libbre; adunque è manifesto che la caduta del peso di dieci libbre fatta nella perpendicolare è bastante a sollevare il peso di cento libbre pur nella perpendicolare, ma solo per lo spazio della decima parte della scesa del cadente di dieci libbre. Ma quella forza che può

alzare un peso di cento libbre, è eguale alla forza con la quale il medesimo peso delle cento libbre calca in giù, e questa era la potente a cacciare il palo, postavi sopra e premendo; ecco dunque esplicato, come la caduta di dieci libbre di peso è potente a cacciare una resistenza equivalente a quella che ha il peso di cento libbre per esser sollevato; ma la cacciata non sarà più che per la decima parte della scesa del percuziente. E se noi porremo la resistenza del palo esser raddoppiata o triplicata, sì che vi bisogni per superarla la pressura di dugento o trecento libbre di peso morto, replicando simil discorso, troveremo l'impeto delle dieci libbre cadenti a perdendicolo esser potente a cacciare, sì come la prima, la seconda e la terza volta il palo, e come nella prima la decima parte della sua scesa, così nella seconda volta la ventesima, e nella terza la trentesima parte della sua scesa. E così moltiplicando la resistenza in infinito, sempre la medesima percossa la potrà superare, ma col cacciare il resistente sempre per minore e minore spazio con alterna proporzione; onde pare che noi ragionevolmente possiamo asserire, la forza della percossa essere infinita. Ma ben conviene che altresì consideriamo anche per un altro verso, la forza del premente senza percossa essere essa ancora infinita; imperocchè quando ella supera la resistenza del palo, lo caccerà non per quello spazio solo che lo averà cacciato la percossa, ma seguiterà di cacciarlo in infinito.

Sagr. Io veramente scorgo il progresso di V. S. camminare molto diritttamente all'investigazione della vera causa del presente problema; ma perchè mi pare che la percossa possa essere creata in tante e tante maniere, ed applicata a tante varietà di resistenze, credo esser necessario andarne esplicando almeno alcune, l'intelligenza delle quali potrebbe aprirci la mente all'intelligenza di tutte.

Salv. V. S. dice benissimo, ed io di già mi era apparecchiato ad apportarne qualche caso. Per uno de' quali diremo che alle volte può accadere che l'operazione del percuziente si faccia palese, non sopra il percosso, ma nello stesso percuziente; e così dando sopra una ferma incudine un colpo

con un martello di piombo, l'effetto caderà nel martello, il quale si ammaccherà, e non nell'incudine, che non si abbasserà. E non dissimile a questo effetto è quello del mazzuolo degli scarpellini, il quale essendo di ferro non temperato, e però tenero, nel lungo percuotere sopra lo scarpello di acciajo di dura tempera, non ammacca esso scarpello, ma bene incava e dilacera sè medesimo. Altra volta in altro modo si rifletterà l'effetto pure nel percuziente, sì come non di rado si vede che, volendosi continuare di cacciare un chiodo in un legno durissimo, il martello ribalza indietro senza punto cacciare innanzi il chiodo, ed in questo caso si dice: il colpo non è attaccato. Non dissimile è il balzo che sopra un duro e fermo pavimento fa il pallone gonfio ed ogni altro corpo di materia talmente disposta, che ben cede alla percossa, ma ritorna come facendo arco nella sua prima figura; ed un tal ribalzamento accade quando non solamente quello che percuote cede e poi ritorna, ma quando ciò accade in quello sopra di che si percuote, ed in tal maniera risalta una palla, ancorchè di materia durissima e nulla cedente, cadendo sopra la carta pecora ben tesa del tamburo. Scorgesi anco, e con maggiore maraviglia, l'effetto che nasce quando allo spignere senza percossa si aggiugne una percossa, facendo un composto di amendue; e così vediamo nelli strettoi da panni o da olio e simili, quando col semplice spignere di quattro o sei uomini si è fatta calare la vite quanto potevano, che col ritirare un passo indietro la stanga, e velocemente urtando con essa, moveranno ancora più e più la vite, e si ridurranno a tal segno, che l'urto, con la forza di quei quattro o sei, farà quello che non farebbero dodici o venti col solo spignere: nel qual caso si ricerca la stanga esser molto grossa e di legno assai duro, sì che poco o nulla si pieghi, perchè cedendo questa, l'urto si spegnerebbe nel torcerla.

In ogni mobile, che debba esser mosso violentemente, pare che siano due spezie distinte di resistenza: l'una che riguarda quella resistenza interna per la qual noi diciamo più difficilmente alzarsi un grave di mille libbre che uno di cento; l'altra che ha rispetto allo spazio per lo quale si ha da fare

il moto, e così maggior forza ricerca una pietra ad esser gettata lontano cento passi che cinquanta, ec. A queste due diverse resistenze rispondono proporzionatamente li due diversi motori, l'uno de' quali muove premendo senza percuotere, l'altro opera percuotendo. Il motore che opera senza percossa non muove se non una resistenza minore, benchè insensibilmente, della sua virtù o gravità premente, ma la moverà bene per ispazio infinito accompagnandola sempre con la sua stessa forza; e quello che muove percuotendo, muove qualsivoglia resistenza, benchè immensa, ma per limitato intervallo. Onde io stimo vere queste due proposizioni, il percuziente muovere infinita resistenza per finito e limitato intervallo, il premente muover finita e limitata resistenza per infinito intervallo; sì che al percuziente sia proporzionabile l'intervallo e non la resistenza, ma al premente la resistenza e non l'intervallo. Le quali cose mi fanno dubitare che il quesito del Sig. Sagredo sia inesplicabile, come quello che cerchi di agguagliar cose non proporzionali, che tali credo io che siano l'azione della percossa e quella della pressione, sì come nel caso particolare: qualunque immensa resistenza che sia nel cuneo BA (*Fig.* 148) sarà mossa da qualunque percuziente C, ma per limitato intervallo, come tra i punti BA; ma dal premente D, non qualunque resistenza sia nel cuneo BA sarà spinta, ma una limitata e non maggiore del peso D; ma questa non sarà spinta per lo limitato intervallo tra i punti BA, ma in infinito, essendo sempre eguale la resistenza nel medesimo mobile AB, come si dee supporre, non facendosi menzione in contrario nella proposta.

Il momento di un grave nell' atto della percossa altro non è che un composto ed aggregato di infiniti momenti, ciascuno di essi eguale al solo momento o interno e naturale di sè medesimo (che è quello della propria gravità assoluta, che eternamente egli esercita posando sopra qualunque resistente) o estrinseco e violento, quale è quello della forza movente. Tali momenti nel tempo della mossa del grave si vanno accumulando in instante con eguale additamento, e conservando in esso, nel modo appunto che si va accrescendo la velocità

di un grave cadente. Che si come negl' infiniti instanti di un tempo, benchè minimo, si va sempre passando da un grave per nuovi ed eguali gradi di velocità, con ritener sempre gli acquistati nel tempo precorso, così anche nel mobile si vanno conservando di instante in instante, e componendosi quei momenti, o naturali o violenti, conferitigli o dalla natura o dall' arte ec.

La forza della percossa è d' infinito momento tuttavolta che ella si applichi in un momento ed in uno instante dal grave percuziente sopra materia non cedente, come si dimostrerà.

Il cedere di una materia percossa da un grave mosso con qualsivoglia velocità, non si può fare in uno instante, perchè altrimenti si darebbe il moto instantaneo per uno spazio quanto, il che si prova impossibile. Se dunque si fa in tempo la cedenza nel luogo della percossa, in tempo ancora si farà l' applicazione di que' momenti acquistati nel moto dal percuziente, il qual tempo è bastante ad estinguere ed a smorzare in parte quell' aggregato de' sopraddetti momenti; i quali se in uno instante di tempo si esercitassero contro il resistente (il che seguirebbe, quando le materie sì del percosso come del percuziente non cedessero nè meno un punto) assolutamente farebbero effetto ed operazione assai maggiore in muoverlo e superarlo, che applicato in tempo benchè brevissimo; dico effetto maggiore, perchè pure qualche effetto faranno eglino contro il percosso, quantunque minima si sia la percossa e grandissima la cedenza; ma sarà forse impercettibile tale effetto a' nostri sensi, contuttochè realmente vi sia; il che a suo luogo dimostreremo. Ma pure ciò manifestamente si scorge dall' esperienza, poichè se con un ben piccolo martello si anderà con percosse uniformi incontrando la testa di una grandissima trave che sia a giacere in terra, dopo molte e molte percosse si vedrà finalmente essersi mossa la trave per qualche spazio percettibile, segno evidentissimo che ogni percossa operò separatamente per la sua parte nello spingere la trave; poichè se la prima percossa non fusse a parte di tale effetto, tutte le altre susseguenti, come in luogo di prime,

niente affatto opererebbero, la qual cosa è contraria all'esperienza, al senso ed alla dimostrazione che si apporterà ec.

La forza della percossa è d'infinito momento perchè non vi è resistenza benche grandissima, che non venga superata da forza di percossa minimissima.

Colui che serra le porte di bronzo di S. Giovanni, invano tenterebbe di serrarle con una sola e semplice spinta, ma con impulso continuato va imprimendo in quel corpo mobile gravissimo forza tale, che quando arriva a percuotere ed urtare nella soglia, fa tremare tutta la chiesa. Da questo si veda come si imprima ne' mobili, e più ne' più gravi, ed in essi si moltiplichi e conservi la forza, che con qualche tempo gli si va comunicando ec.

Simile effetto si vede in una grossa campana, che non con una sola tirata di corda, nè quattro, nè sei, si mette in moto gagliardo ed impetuoso, ma con molte e molte, le quali a lungo reiterate, le ultime vanno aggiugnendo forza sopra quella acquistata dalle prime e precedenti strappate, e quanto più grossa e grave sarà la campana, tanto maggiore forza ed impeto acquisterà, essendogli comunicato in più lungo tempo e da maggior numero di strappate che non si ricerca ad una piccola campana, che ben presto si mette in impeto, ma presto ancora le si toglie, non essendosi ella imbevuta (per così dire) di tanta forza quanto la più grossa.

Il simile accade ne' navigli ancora, i quali non alle prime vogate de' remi o ai primi impulsi del vento si mettono in furioso corso, ma dalle continue vogate e dalla continua impressione di forza che fa il vento nelle vele, acquistano impeto grandissimo atto a fracassare gl' istessi vascelli, mentre da quello portati dessero d' urto in uno scoglio.

L'arco dolce, ma grande d'una balestra farà talvolta maggior passata d'un altro assai più duro, ma di minor tratta, poichè quello accompagnando per più tempo la palla, gli va continuamente imprimendo la forza, e questo tosto l'abbandona.

FINE DEI DIALOGHI.

INDICE ALFABETICO

DELLE PRINCIPALI MATERIE TRATTATE

NEI

DIALOGHI DELLE NUOVE SCIENZE.

A

C

D

E

F

G

I

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V



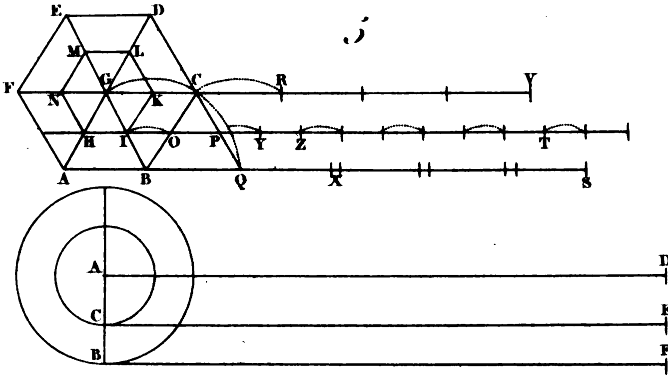
INDICE

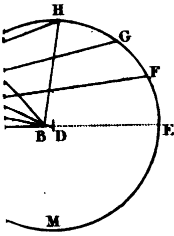
DEL PRESENTE VOLUME

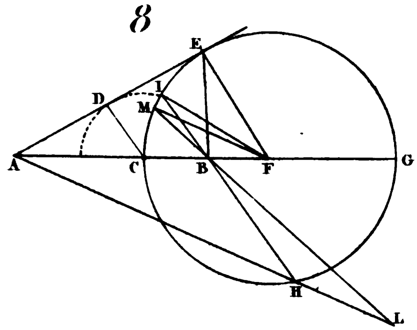
CONTENENTE

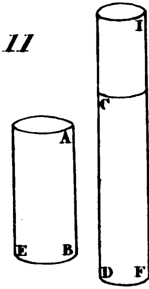
I DIALOGHI DELLE NUOVE SCIENZE.

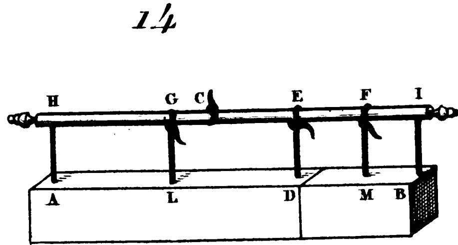
Questo Volume è corredato di otte Tavole di figure geometriche.

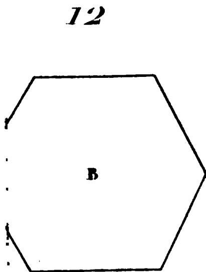

5
E
D
M
L
F
G
C
R
V
N
K
H
I
O
P
Y
Z
T
A
B
Q
X
S

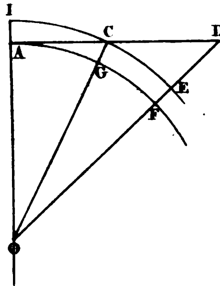

H
G
F
B
D
E
M

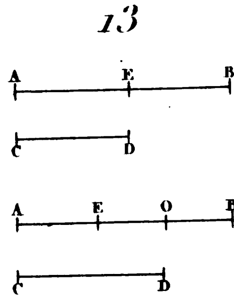

8
E
I
D
M
A
C
B
F
G
H
L


11
I
C
A
E
B
D
F

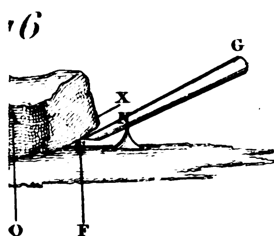

14
H
G
C
E
F
I
A
L
D
M
B

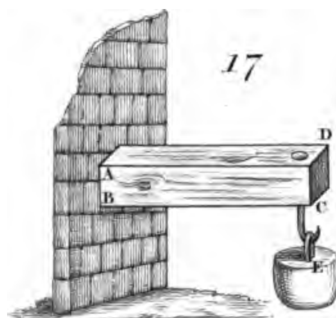

12
B

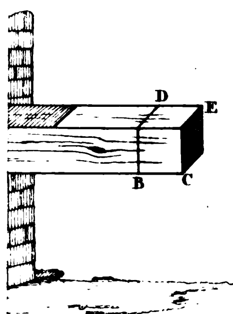

I
C
D
A
G
E
F

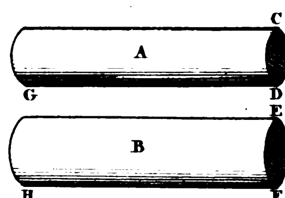

13
A
E
B
C
D
A
E
O
B
C
D

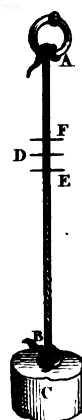
Pozzi inc.

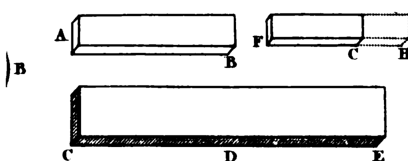

16
G
X
N
O
F

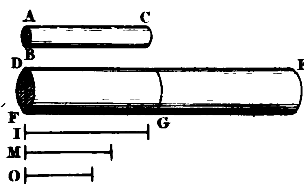

17
D
A
B
C
E

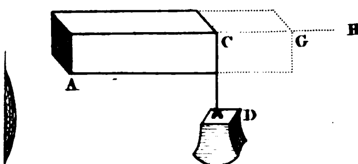

D
E
B
C

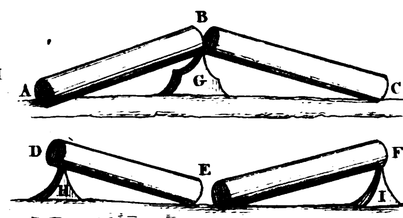

20
C
A
G
D
E
B
H
F


21
A
F
D
E
B
C

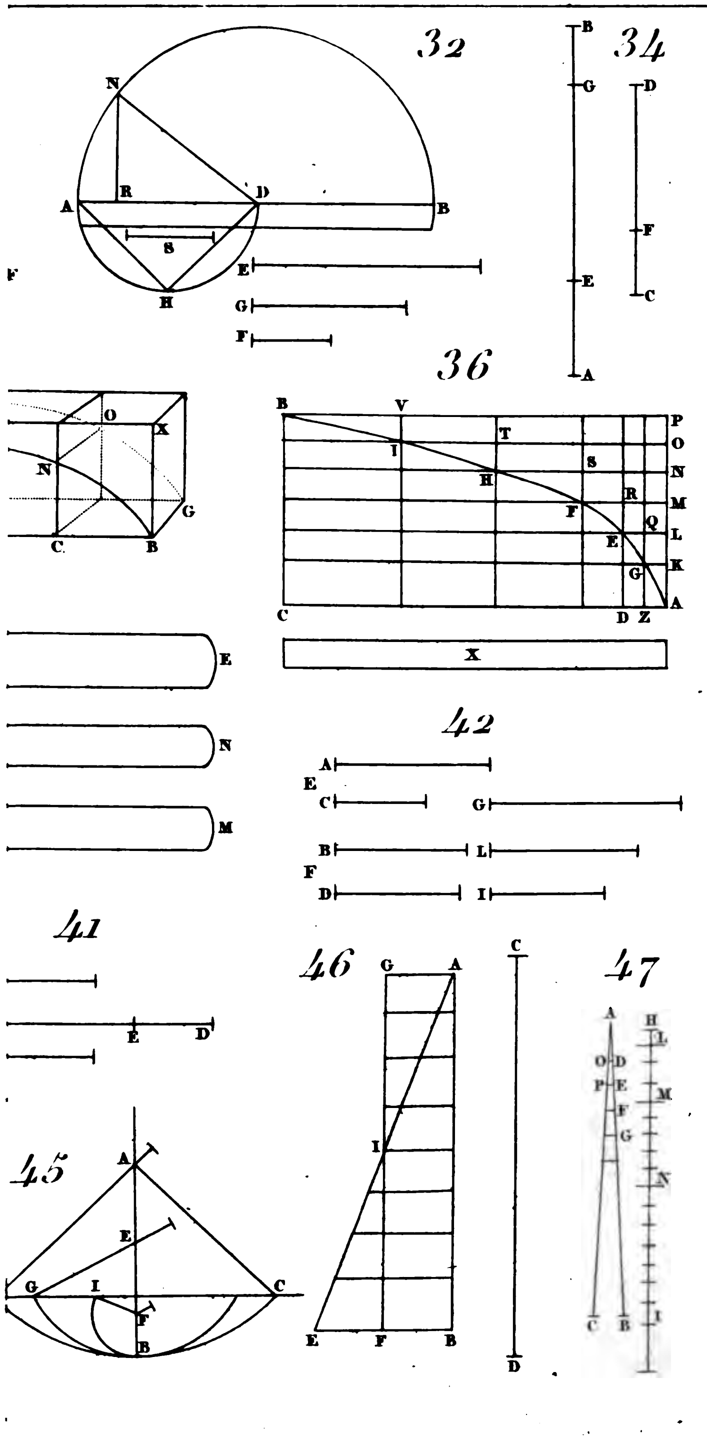

24
A
B
F
C
H
C
D
E

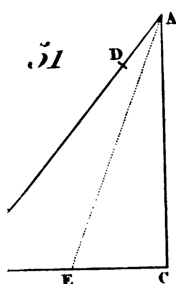

25
A
C
B
D
E
F
G
I
M
O

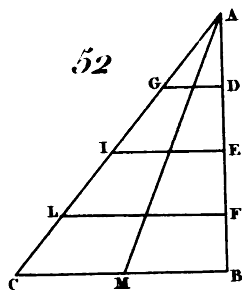

28
C
G
H
A
D

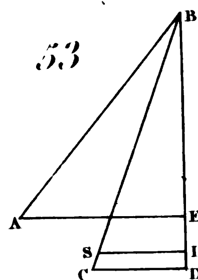

29
B
A
G
C
D
E
F
H
I

Pozzi inc.

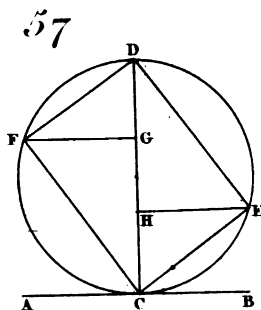

32
N
R
A
D
B
S
H
E
G
F
34
B
G
E
A
D
F
C
36
B
V
T
I
H
S
R
F
E
Q
G
P
O
N
M
L
K
A
C
D
Z
X
O
X
N
G
C.
B
E
N
M
42
A
E
C
G
B
L
F
D
I
41
E
D
45
A
E
G
I
C
F
B
46
G
A
I
E
F
B
C
D
47
A
H
L
O
D
P
E
M
F
G
N
C
B
I

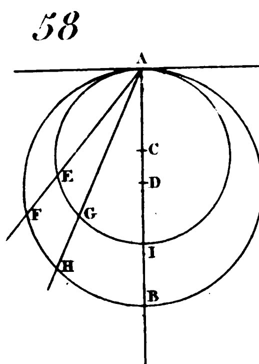

51
A
D
E
C

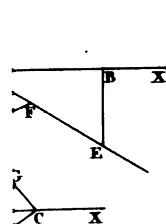

52
A
G
D
I
E
L
F
C
M
B

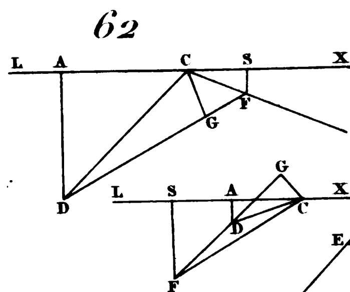

53
B
A
E
S
I
C
D

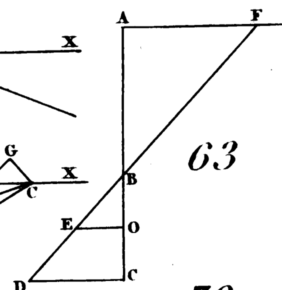

C
B
D
E
F

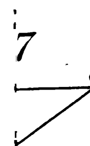

57
D
F
G
H
E
A
C
B

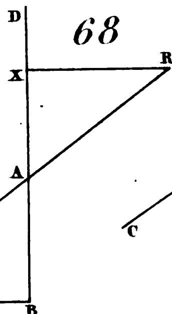

58
A
C
D
E
F
G
I
H
B

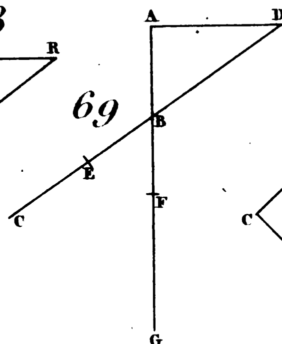

B
X
F
E
C
X

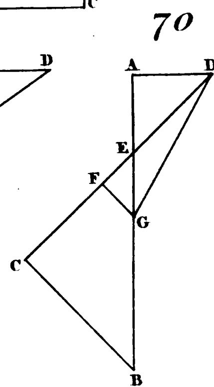

62
L
A
C
S
X
G
F
D
G
L
S
A
X
C
D
F


A
F
63
B
E
O
D
C

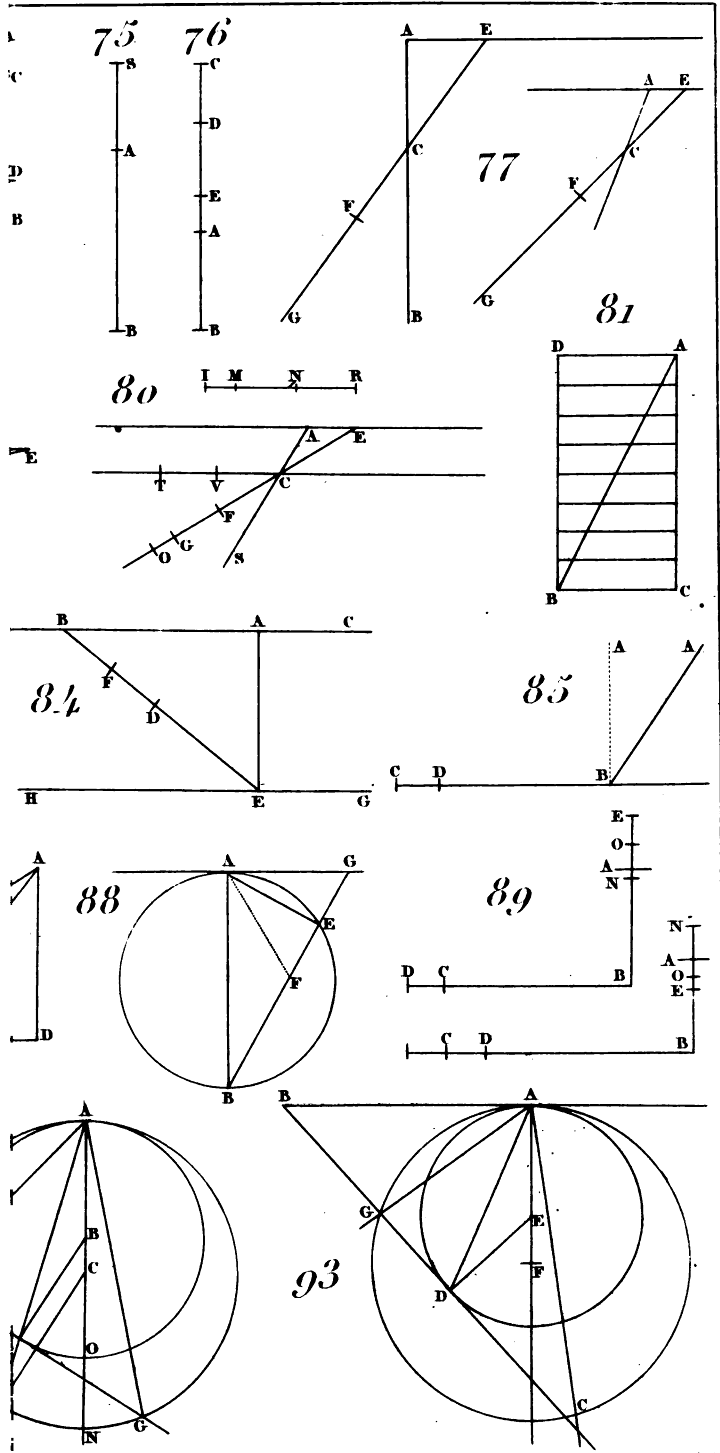

7
G

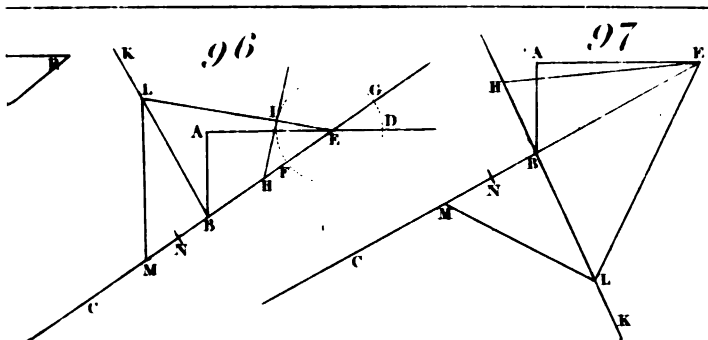

D
68
X
R
A
E
B

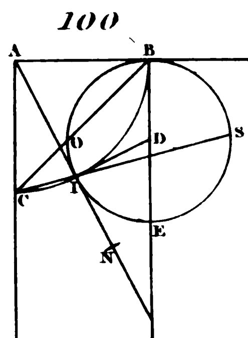

A
D
69
B
E
C
F
G

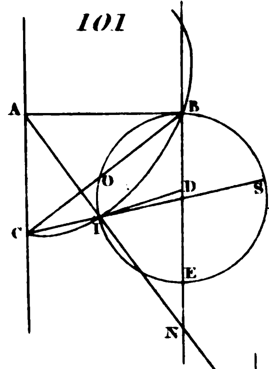

70
A
D
E
F
G
C
B

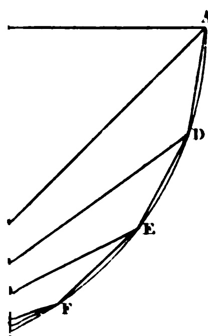
...i inc.

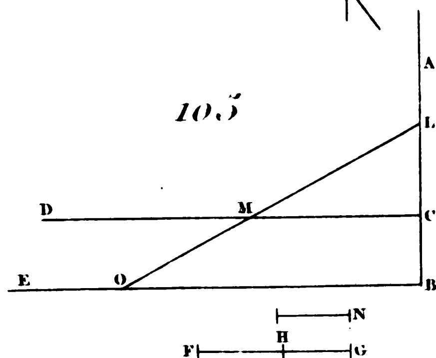

75
76
77
80
81
84
85
88
89
93

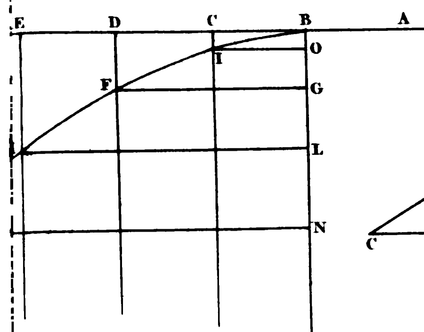

96
97
K
L
I
A
E
G
D
H
F
B
N
M
C
A
E
H
B
N
M
C
L
K

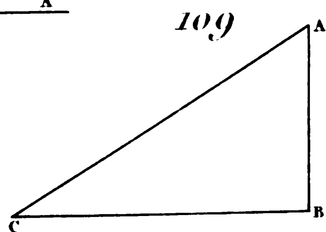

100
A
B
O
D
S
C
I
E
N

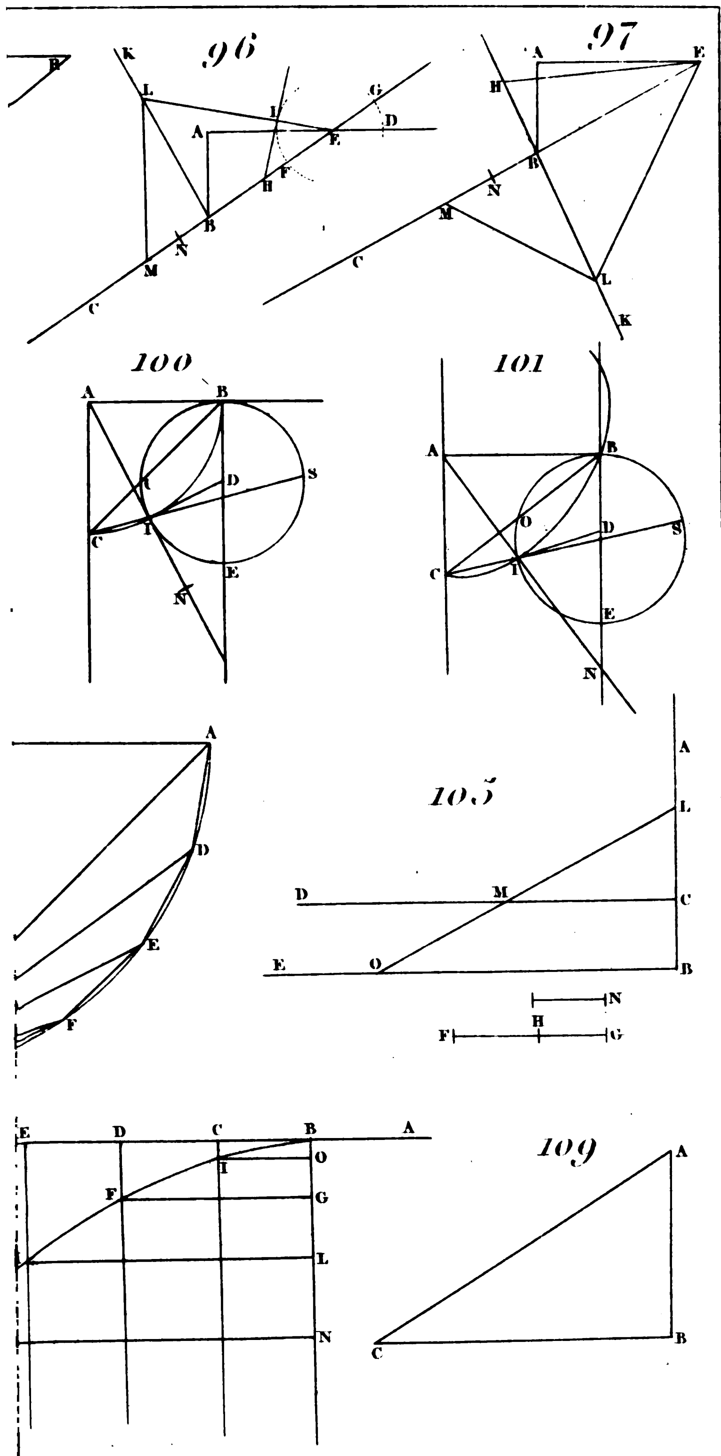

101
A
B
O
D
S
C
I
E
N

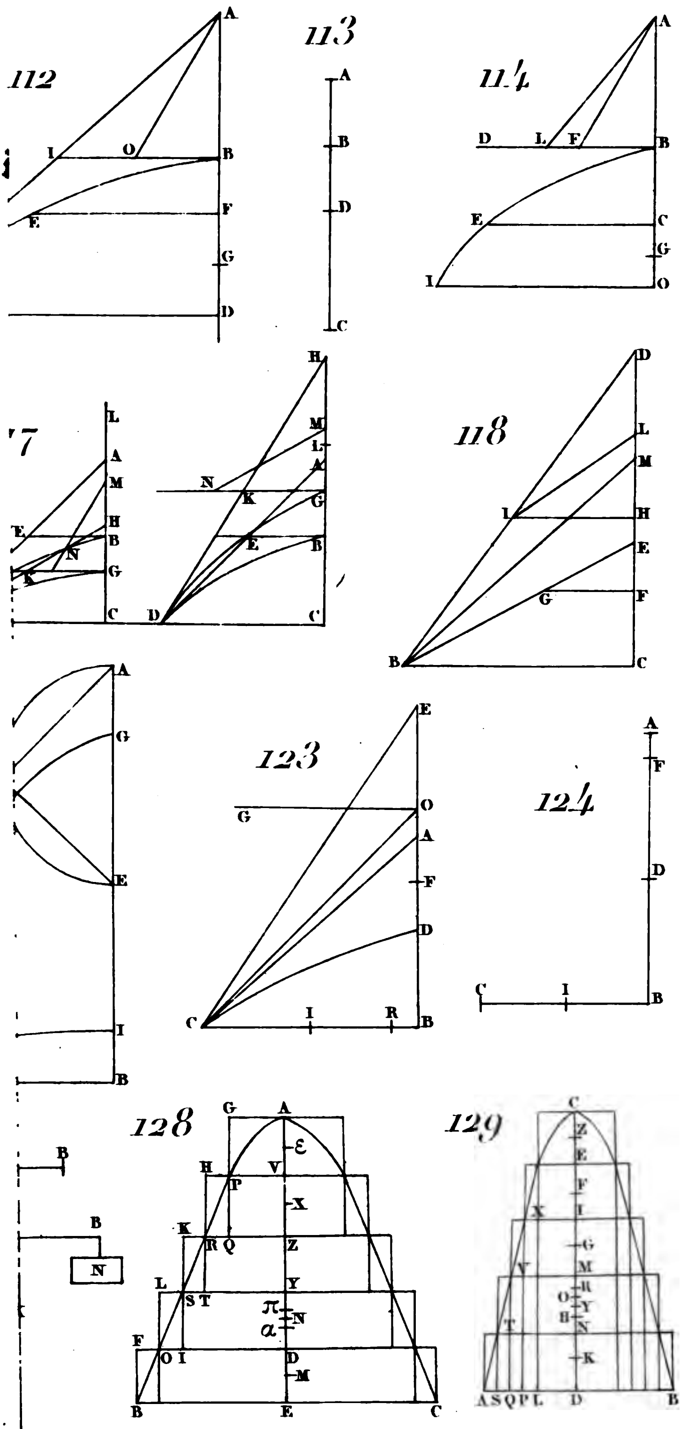

A
D
E
F

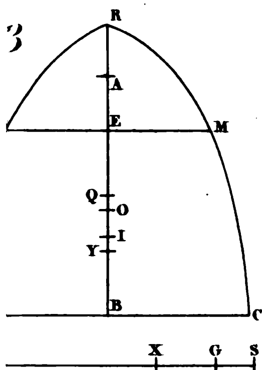

A
L
D
M
C
E
O
B
N
H
F
G


E
D
C
B
A
I
O
F
G
L
N


109
A
C
B

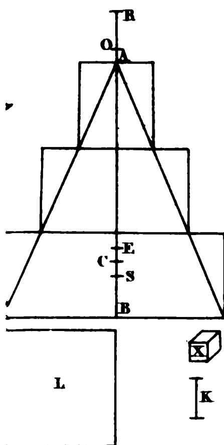

96
97
100
101
103
109

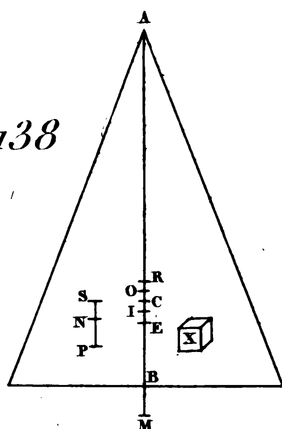

112
113
114
118
123
124
128
129

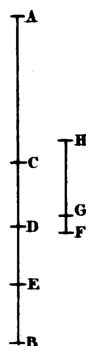


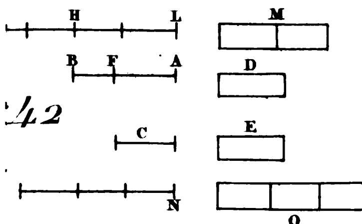
L O	N P X I	Q	S	T
A	A	A	A	A
A	A	A	A	a
A	A	A	B	
A	A	B	F	
A	B	B		
B	B	C		
B	B	G		
B	C			
B	C			
C	D			
C	H			
C				
D				
D				
E				
K				

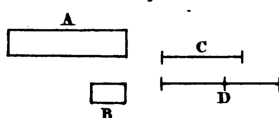
134

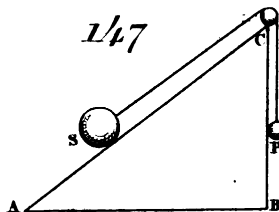


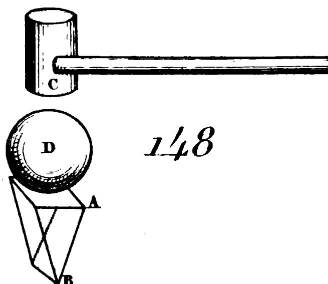












...gi inc.



